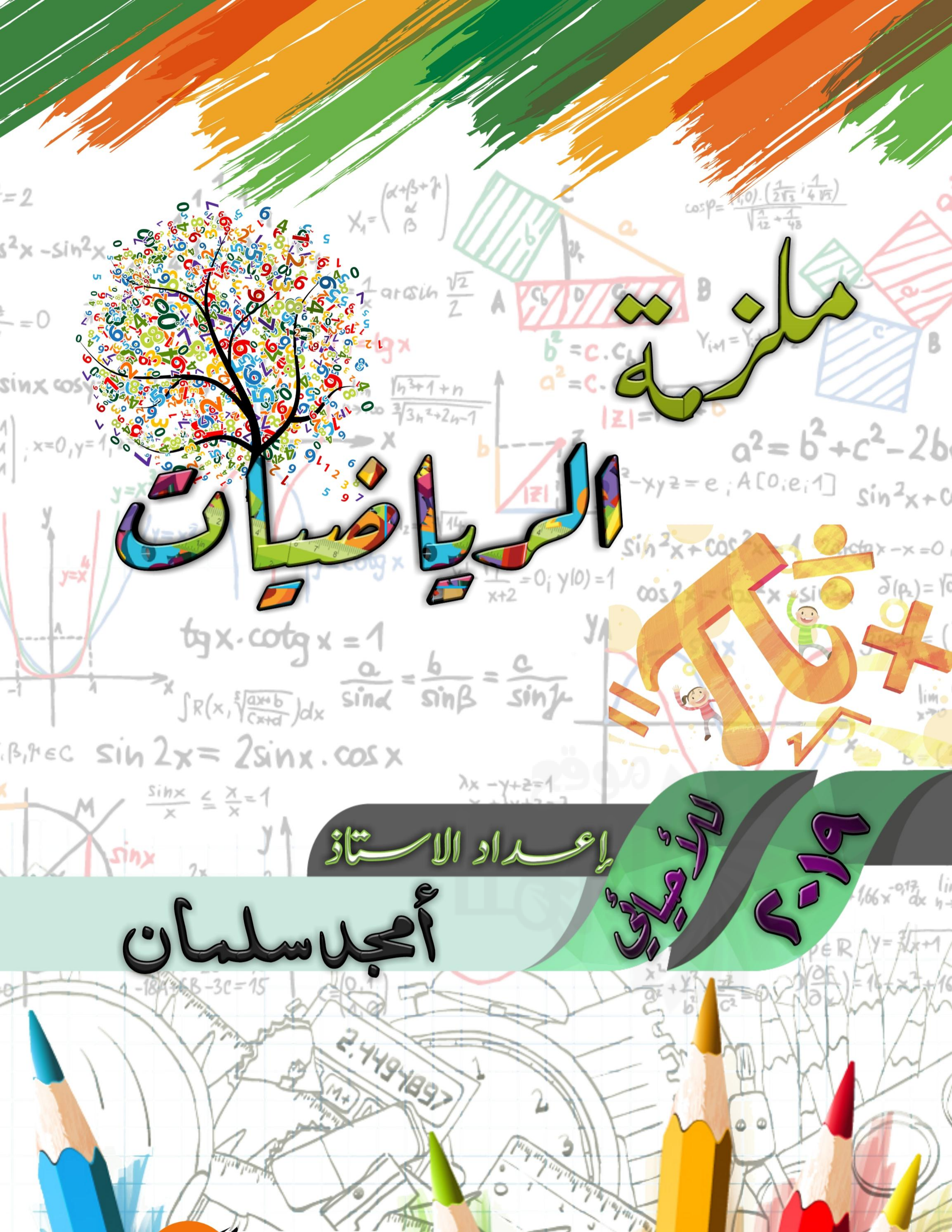


ملزمة
الرياضيات
إعداد الاستاذ
أمجد سلمان
٢٠١٩


٢٠١٩
الرياضيات
الفصل الاول
الأعداد المركبة
DES:ALI ADEL
Insta:5A.9K
للصف السادس للأحيائي
إعداد الاستاذ أمجد سلمان

مواضيع الفصل الأول (يأتي وزاريا فرعين 20 درجة سنويا وبكافة الأدوار)

وما يجب على الطالب التركيز عليه ودراسته بجدية وحسب درجة الأهمية

- تعريف بالعدد المركب و شرح قوى (i) و مبدأ التساوي بين عددين مركبين.
- العمليات على الاعداد المركبة (جمع-طرح-ضرب-قسمة) وخواص هذه العمليات.
- التعرف على النظير الجمعي والضربي ومرافق العدد.
- كيفية حل الاعداد المركبة المرفوعة لاس كبير ومعالجة الاقواس. (مهم 10%)
- إيجاد قيم x,y الحقيقية بحالاتها الأربعة: - يأتي وزاريا بنسبة 50%
  - A. عندما تكون قيم x,y معزولة.
  - B. عندما تكون قيم x,y متفرقة.
  - C. عندما يعطي عددين مترافقين فيهم x,y مجهولة.
  - D. عندما نحتاج الى تحليل مجموع مربعين او تجربة تحتوي x,y بعد الضرب ب$(-i^2)$.
- إيجاد الجذر التربيعي للعدد المركب (درجة أهميته 20%).
- حل المعادلة التربيعية في الاعداد المركبة بحالاتها الثلاثة: - درجة أهميته 50%
  - a. عندما تكون المعادلة ذات حدين فقط.
  - b. عندما تكون ثلاثية الحدود والحل بالدستور او بالتجربة بالطرق الخاصة.
- إيجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذريها m,L. درجة أهميته 30%
- إيجاد قيم a, b,c المجاهيل في المعادلة التربيعية. درجة أهميته 40%
- التعرف على تمثيل العدد هندسيا بشكل ارجاند بحالاته الثلاثة. درجة أهميته 10%
- إيجاد المقياس والسعة الأساسية والصيغة القطبية بحالتين: - درجة أهميته 30%
  - a) عندما يكون العدد كاملا Z=x+yi
  - b) عندما يكون العدد من جزء واحد حقيقي او تخيلي.
- مبرهنة ديموافر وحالاتها: - درجة اهميته 100%
  1. عندما يكون العدد بالصيغة القطبية او العادية والاس عدد صحيح موجب او سالب.
  2. تبسيط المقادير ذات الزاوية (θ) عندما تكون مختلفة المعاملات او إشارة وسط القيمة القطبية.
- نتيجة مبرهنة ديموافر وحالاتها: - درجة أهميته 100%
  - A. إيجاد الجذور للاعداد المركبة.
  - B. إيجاد الجذور للاعداد المركبة المرفوعة لاس عدد صحيح. او حل مسائل اعداد ذات اس كسر بسط ومقام.
  - C. حل المعادلات مهما كانت درجتها.

Telegram: -@Amjed2017 Facebook: -amjed.salman.52 Mob: -07705795052

الفصل الأول

الاعداد الطبيعية:- وتشمل مجموعة الصفر ومجموعة الاعداد الموجبة = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

الاعداد الصحيحة :- وتشمل الاعداد الطبيعية مضاف لها مجموعة الاعداد السالبة
= $\{\ldots\ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\}$

الاعداد النسبية :- وتشمل الاعداد الصحيحة مضاف لها مجموعة الاعداد بصورة $\frac{a}{b}$
= $\left\{\ldots,,, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \ldots\ldots 1, \ldots\right\}$

الاعداد الحقيقية :- وتشمل الاعداد النسبية مضاف لها مجموعة الجذور الصماء التي ليس لها قيمة مضبوطة اي بصورة $\sqrt[n]{b}$ = $\left\{\ldots,,, -1, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots\ldots 1, \ldots\right\}$

الاعداد المركبة:- عندما يكون العدد داخل الجذر سالب هنا راح يكون عدنا احتمالين. اذا مطلوب جذر فردي فيكون هنالك جواب مثلا:-

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \rightarrow -2 \times -2 \times -2 = -8$$

لكن اذا كان العدد سالب والجذر زوجي ستحصل لدينا مشكلة لأننا لا نستطيع ان نعطي جوابا عندما يضرب يعطي العدد الاصلي.

$$\sqrt[4]{-16} \neq -2 \qquad \rightarrow -2 \times -2 \times -2 \times -2 \neq -16 \qquad , 2.2.2.2 \neq -16$$

$$\sqrt[2]{-16} \neq -4 \qquad \rightarrow -4 \times -4 \neq -16 \qquad , 4.4 \neq -16$$

تصدى العالم السويسري اويلر لهذه المشكلة وحلل الاعداد هذه بالصورة الاتية :-

$$\sqrt[2]{-16} = \sqrt[2]{16 \times -1} = \sqrt[2]{16}.\sqrt[2]{-1} = 4\sqrt[2]{-1} = 4i$$

$$\sqrt[2]{-9} = \sqrt[2]{9 \times -1} = \sqrt[2]{9}.\sqrt[2]{-1} = 3\sqrt[2]{-1} = 3i$$

$$\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25 \times -1} = \sqrt[2]{25}.\sqrt[2]{-1} = 5\sqrt[2]{-1} = 5i$$

$$\sqrt[2]{36} = 6$$

وهكذا استطاع اويلر ان يضع تبسيط وليس حلا للمشكلة واقترح ان يرمز الى $i = \sqrt{-1}$ بمعنى عددا تخيليا او سحريا (*imaginary number*) .

$$\sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{a \times -1} = \sqrt[2]{a}.\sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{a}\, i$$

$$\frac{A + B + C + \cdots}{N} = \frac{A}{N} + \frac{B}{N} + \frac{C}{N}$$

معلومة رياضية مهمة

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} \qquad \sqrt[n]{A.B} = \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}$$

جريمة $\sqrt[n]{A \mp B} \neq \sqrt[n]{A} \mp \sqrt[n]{B}$

تتوزع الجذور على الضرب والقسمة ولا تتوزع على الجمع والطرح .

العدد المركب

يسمى العدد $C = a + bi$ بالعدد المركب حيث انه ستكون من جزئين حقيقي وتخيلي $C = (\text{جزء حقيقي}) + (\text{جزء تخيلي}).i$ حيث :-

$c = complex\ number \quad \in C$ تسمى هذه الصيغة بالصيغة العامة او العادية او الجبرية للعدد المركب

و الصيغة $(a\ ,b)$ بدون i بالصيغة الديكارتية .

مثال :- جد الصيغة العادية و الديكارتية وحدد الجزء الحقيقي والتخيلي لكل عدد مما يلي ؟

$$1)-5 \quad 2)\sqrt{-100} \quad 3)-1-\sqrt{-3} \quad 4)\ \frac{1+\sqrt{-25}}{4} \quad 5)-\sqrt{5}-\frac{3i}{2} \quad 6)\ 4i-3$$

لازم نبسط العدد قبل كلشي يعني نخليه يصير عدد مركب .

اضافة جزء تخيلي $C = -5 = -5 + 0i$.

اضافة جزء حقيقي $C = \sqrt{-100} = 10i = 0 + 10i$.

تبسيط $C = -1 - \sqrt{-3} = -1 - \sqrt{3}i$.

توزيع $C = \frac{1+\sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5i}{4}$.

جاهز $C = -\sqrt{5} - \frac{3i}{2}$.

تدوير $C = 4i - 3 = -3 + 4i$.

العدد	الصيغة العادية	الصيغة الديكارتية	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
-5	-5+0i	$(-5,0)$	-5	0
$\sqrt{-100}$	0+10i	$(0,10)$	0	10
$-1-\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{3}i$	$(-1,-\sqrt{3})$	-1	$-\sqrt{3}$
$\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$	$\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
$-\sqrt{5}-\frac{3i}{2}$	$-\sqrt{5}-\frac{3i}{2}$	$\left(-\sqrt{5},-\frac{3}{2}\right)$	$-\sqrt{5}$	$-\frac{3}{2}$
$4i-3$	$-3+4i$	$(-3,4)$	-3	4

شوف :- وين ما يصير عندك بكل الفصل i^n شنو تسوي . تترك المطلوب وتبسط i^n . شلون؟

أ-اذا كان الاس اقل او يساوي 4. نتبع التالي: -

$$i^n \begin{cases} i^4 = i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{cases}$$

ب-اذا كان الاس اكبر من 4 لازم يتخفض للأسس الفوك. شلون؟ نقسم على 4 ونأخذ فقط الباقي ليمثل الاس الجديد.

$$i^n = (i^4)^{\frac{n}{4}} \; i^{\text{باقي}} = i^{\text{باقي}}$$

ج-اذا كان الاس سالب i^{-n} ننزل i^n للمقام ثم نقسمها ونبسطها ومانحول. ثم نضيف i^4 للبسط ونختصر ثم نحول.

$$i^{-n} = \frac{1}{i^n} = \frac{1}{i^{\text{باقي}}} = \frac{i^4}{i^{\text{باقي}}} = \text{ناتج}$$

س:- جد ناتج ما يأتي: -

$i^2, i^3, i^{23}, i^{53}, i^{124}, i^{-58}, i^{-47}, i^{4n+93}, i^{8n-20}$

الحل

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^{23} = (i^4)^5 \; i^3 = (1)^5 \; (-\mathrm{i}) = -i$

$i^{53} = (i^4)^{13} \; i^1 = (1)^{13} \; (\mathrm{i}) = i$

$i^{124} = (i^4)^{31} \; i^0 = (1)^{31} \; (1) = 1$

$$i^{-58} = \frac{1}{i^{58}} = \frac{1}{(i^4)^{14} \; i^2} = \frac{i^4}{i^2} = i^2 = -1$$

$$i^{-47} = \frac{1}{i^{47}} = \frac{1}{(i^4)^{11} \; i^3} = \frac{i^4}{i^3} = \mathrm{i}$$

$i^{4n+93} = i^{4n}. i^{93} = (i^4)^n \; i^0 . (i^4)^{23} \; i^1 = 1.1.1. i = i$

$$i^{8n-20} = \frac{i^{8n}}{(i^4)^5} = \frac{1}{1} = 1$$

تساوي عددين مركبين

يتساوى عددان مركبان، اذا تساوى جزئيها الحقيقيان مع بعضهما وكذلك التخيليان.

$$C_1 = a_1 + b_1 i \qquad C_2 = a_2 + b_2 i$$

بحيث :-

$$a_1 = a_2 \qquad b_1 = b_2 \qquad \therefore\ c_1 = c_2$$

س:- بين فيما لو ان الاعداد التالية متساوية ام لا ؟

- $3 - 2i, 3 - \sqrt{-4}$
- $i^3,\ i^{56}$

الحل

نبسط الاعداد قبل البدء بالمقارنة.

I. $c_1 = 3 - 2i \qquad c_2 = 3 - 2i$

$a_1 = a_2 = 3 \qquad b_1 = b_2 = -2 \qquad \therefore\ c_1 = c_2$

II. $c_1 = i^3 = -i = 0 - i \qquad c_2 = i^{56} = (i^4)^{14} = 1 = 1 + 0i$

$a_1 = a_2 = 0 \qquad b_1 \neq b_2 \qquad \therefore\ c_1 \neq c_2$

العمليات على الاعداد المركبة

1-لجمع عددين مركبين، نجمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي. مع مراعاة الإشارة.

$$C_1 + C_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

2-لطرح عددين مركبين، نضع اقواس لكلا العددين ثم ندخل إشارة الطرح على العدد الثاني ونرفع الاقواس. ثم نجمع او نطرح حسب الإشارة الجديدة.

$$C_1 + C_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i$$

توضيحات وكذا

$a\sqrt[n]{r} + b\sqrt[n]{r} = (a+b)\sqrt[n]{r} \rightarrow\rightarrow\rightarrow 6\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 8\sqrt[3]{5}$

$a\sqrt[n]{r} + b\sqrt[m]{r} \neq\rightarrow\rightarrow\rightarrow 6\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[5]{5} \neq$ لا يجمع

$a\sqrt[n]{r} + b\sqrt[n]{c} \neq\rightarrow\rightarrow\rightarrow 6\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{2} \neq$ لا يجمع

Telegram: -@Amjed2017 Facebook: -amjed.salman.52 Mob: -07705795052

س:- جد ناتج جمع مرة وطرح مرة أخرى :-

$A) 3-2i, -5+2i$ $B) -2, 4-5i$ $c) -4\sqrt{2}i, 7-2\sqrt{2}i$

الحل

$A) C_1 + C_2 = 3 - 2i + (-5) + 2i = -2$

$C_1 - C_2 = (3-2i) - (-5+2i) = 3 - 2i + 5 - 2i = 8 - 4i$

$B) C_1 + C_2 = -2 + 0i + 4 - 5i = 2 - 5i$

$C_1 - C_2 = (-2+0i) - (4-5i) = -2 + 0i - 4 + 5i = -6 + 5i$

$B) C_1 + C_2 = 0 - 4\sqrt{2}i + 7 - 2\sqrt{2}i = 7 - 6\sqrt{2}i$

$C_1 - C_2 = \left(0 - 4\sqrt{2}i\right) - \left(7 - 2\sqrt{2}i\right) = 0 - 4\sqrt{2}i - 7 + 2\sqrt{2}i = -7 - 2\sqrt{2}i$

خواص عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الجمع على الاعداد المركبة بالخواص الآتية :

$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

فان :

* الخاصية الابدالية . (Commutativity) (1) $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$

* الخاصية التجميعية . (Associativity) (2) $c_1 + (c_2 + c_3) = (c_1 + c_2) + c_3$

* النظير الجمعي . (Additive Inverse) (3)

$\forall c \in \mathbb{C},\ c = a + bi\ \exists\ z \in \mathbb{C} :\ c + z = z + c = 0 \Rightarrow z = -c = -a - bi$

*العنصر المحايد الجمعي . Additive Identity يرمز له بالرمز e ويُعرف (4) $e = 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

مما سبق نستنتج أن $(\mathbb{C}, +)$ هي زمرة ابدالية (Commutative Group)

مثال :- ماهو النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية

العدد	نظيره الجمعي	العدد	نظيره الجمعي
C	-C	C	-C
$3-4i$	$-3+4i$	$-7+5i$	$7-5i$
$3i$	$0-3i$	5	$-5+0i$

الضرب في الاعداد المركبة

تتم عملية الضرب بتوزيع عملية الضرب على الجمع او الطرح. يعني نضرب قوس بقوس.

$$c_1.c_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+b_2a_1i+b_1b_2i^2$$

ملحوظات وكذا: -

1-توزع عملية الضرب توزيع وكلما تضرب لازم تنضرب اشارة ثم رقم ثم i .

2-الناتج 4 حدود اثنين تخيليات بيهم i ذولي ينجمعون سوية و الحد الاخير بيه i^2 هاي دائما نحذفها ونغير اشارة الرقم الي كدامها وبعدين ينجمع مع الحد الاول لان راح يصيرون حقيقيين .

3-الناتج هو عدد مركب.

4-مرات ينطيك العدد المركب مرفوع لاس نفتحه بطريقة مربع حدانية.

$(a\mp bi)^2=$ مربع الاول $\mp 2.$ (الاول بلا اشارة)(الثاني بلا اشارة) + (مربع الثاني)

اشارة الحد الوسط هي ناتج ضرب اشارة الحد الاول بالثاني. $c^4=c^2.c^2$ $c^3=c^2\ .c$

مثال :- جد ناتج كل مما يأتي :-

$$(-2+3i)(4-5i)=-8+10i+12i-15i^2=-8+22i+15=7+22i$$

$$(3+4i)^2=9+24i+16i^2=9+24i-16=-7+24i$$

$$(-3+4i)^2=9-24i+16i^2=9-24i-16=-7-24i$$

$$i(1+i)=i+i^2=i-1$$

$$\frac{-5}{2}(4+3i)=-10-\frac{15}{2}i$$

$$(1+i)^2+(1-i)^2=1+2i+i^2+1-2i+i^2=1+2i-1+1-2i-1=0$$

$$\left(\frac{3}{2}+i\right)^2\left(2-\frac{4}{3}i\right)^2=\left[\frac{9}{4}+2.\frac{3}{2}.i+i^2\right]\left[4-2.2.\frac{4}{3}i+\frac{16i^2}{9}\right]$$

$$=\left[\frac{9}{4}+3i-1\right]\left[4-\frac{16i}{3}-\frac{16}{9}\right]=\left[\frac{9}{4}-1+3i\right]\left[4-\frac{16}{9}-\frac{16i}{3}\right]$$

$$=\left[\frac{9-4}{4}+3i\right]\left[\frac{36-16}{9}-\frac{16i}{3}\right]=\left[\frac{5}{4}+3i\right]\left[\frac{20}{9}-\frac{16i}{3}\right]$$

$$=\frac{100}{36}-\frac{80}{12}i+\frac{60i}{9}-16i^2=\frac{25}{9}-\frac{20}{3}i+\frac{20}{3}i+16$$

$$=\frac{25}{9}+16=\frac{25+144}{9}=\frac{169}{9}$$

مرافق العدد المركب

وهو تغيير إشارة الحد التخيلي من العدد المركب فقط. ورمزه $\bar{c}$ فمثلا العدد

$$C=a+bi \xrightarrow{yields} \bar{C}=a-bi$$

العدد	مرافقه	العدد	مرافقه
$3+4i$	$3-4i$	$-4+4i$	$-4-4i$
$2-5i$	$2+5i$	$6-i$	$6+i$

بموضوع المرافق ومطلوب اثبت او تحقق او برهن شلون نحل

<u>إذا الخط على العددين اثنينهم سوية:-</u>

- ❖ نقوم بعملية الجمع او الطرح او الضرب والخط يبقى موجود بكل خطوة.
- ❖ نطلع ناتج ثم نحذف الخط والناتج نأخذ له المرافق.

<u>اذا الخط متوزع على كل عدد:- سنسوي؟</u>

- ➢ نأخذ المرافق لكل عدد بالبداية.
- ➢ ثم نقوم بالجمع والطرح او الضرب.

س:- اذا كان $c_1 = 1+i$ و $c_2 = 3-2i$ فجد ناتج كل مما يأتي: -

$1)\overline{c_1+c_2} = \overline{c_1}+\overline{c_2}$ $2)\overline{c_1-c_2} = \overline{c_1}-\overline{c_2}$ $3)\overline{c_1c_2} = \overline{c_1}\ \overline{c_2}$ $4)\overline{\overline{c_1}} = c_1$
$5)\ \overline{c_2}\ \ c_2 = a_2^2+b_2^2$ $6)\overline{c} = c$ $when\ \ c \in R$

الحل

$lHS = \overline{c_1+c_2} = \overline{1+\imath+3-2\imath} =$ نجمع اولا $= \overline{4-\imath} = 4+i$

$RHS = \overline{c_1}+\overline{c_2} = \overline{1+\imath}+\overline{3-2\imath} =$ نغير اولا $= 1-i+3+2i = 4+i$ $LHS = RHS$

$lHS = \overline{c_1-c_2} = \overline{(1+\imath)-(3-2\imath)} =$ نطرح اولا $= \overline{1+\imath-3+2\imath} = \overline{-2+3\imath} = -2-3i$

$RHS = \overline{c_1}-\overline{c_2} = \overline{(1+\imath)}-\overline{(3-2\imath)} =$ نغير اولا $= (1-i)-(3+2i) = 1-i-3-2i$
$= -2-3i$ $LHS = RHS$

$lHS = \overline{c_1c_2} = \overline{(1+\imath)(3-2\imath)} =$ نضرب اولا $= \overline{3-2\imath+3\imath-2\imath^2} = \overline{3+\imath+2} = \overline{5+\imath}$
$= 5-i$

$RHS = \overline{c_1}\times\overline{c_2} = \overline{(1+\imath)}.\overline{(3-2\imath)} =$ نغير اولا $= (1-i)(3+2i) = 3+2i-3i-2i^2$
$= 3-i+2 = 5-i$ $LHS = RHS$

$4)\overline{\overline{c_1}} = \overline{\overline{1+\imath}} = \overline{1-\imath} = 1+i = c_1$

$lHS = \overline{c_2}\times c_2 = \overline{(3-2\imath)}.(3-2i) =$ نغير اولا $= (3+2i)(3-2i) = 9-6i+6i-4i^2$
$= 9+4 = 13$ $LHS = RHS$

$RHS = a_2^2+b_2^2 = (3)^2+(-2)^2 = 9+4 = 13$

قاعدة ثابتة من هذه اللحظة: - **كل عدد يضرب بمرافقه =مربع الحقيقي + مربع التخيلي بدون ا .**

6--اذا كان العدد المركب جزء حقيقي فقط فان مرافقه =العدد نفسه. لان المرافق يغير إشارة الحد التخيلي وهنا لا يوجد تخيل لذلك يبقى نفسه.

قسمة الاعداد المركبة

فكرة القسمة في الاعداد المركبة هي التخلص من i التي تكون في المقام. وين ماتشوف i بالمقام لا تتحرك خطوة الا تتخلص منها بطريقة الضرب بالعامل المنسب (العامل المنسب هو مرافق المقام بس راح يصير في البسط والمقام).

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\times\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}=\frac{a_1a_2-a_1b_2i+b_2a_1i-b_1b_2i^2}{a_2^2+b_2^2}$$

1-المقام تربع الحد الاول والثاني وبدون كلشي لا i ولا اشارة. خوشن. بعدين تجمعهم ويطلع رقم وتوزعه على البسط.

2-البسط نوزع الضرب ويطلع 4 حدود وبعدين يصيرون عدد واحد من جزء حقيقي وتخيلي نوزع المقام عليهم.

س: -جد بصورة a+bi

1) $\frac{1-i}{1+i}\times\overbrace{\frac{1-i}{1-i}}^{\text{منسب}}=\frac{1-i-i+i^2}{1+1}=\frac{1-2i-1}{2}=-\frac{2i}{2}=-i=0-i$

2) $\frac{2-i}{3+4i}\times\overbrace{\frac{3-4i}{3-4i}}^{\text{منسب}}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}=\frac{6-11i-4}{25}=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$

3) $\frac{1+2i}{-2+i}\times\overbrace{\frac{-2-i}{-2-i}}^{\text{منسب}}=\frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1}=\frac{-2-5i+2}{5}=\frac{-5i}{5}=-\frac{5}{5}i=0-i$

4) $\frac{3+4i}{3-4i}\times\overbrace{\frac{3+4i}{3+4i}}^{\text{منسب}}=\frac{9+12i+12i+16i^2}{9+16}=\frac{9+24i-16}{25}=\frac{-7+24i}{25}=-\frac{7}{25}+\frac{24i}{25}$

5) $\frac{2+i}{i}\times\overbrace{\frac{-i}{-i}}^{\text{منسب}}=\frac{-2i-i^2}{-i^2}=\frac{-2i+1}{1}=1-2i$

7) $\frac{2+3i}{1-i}\times\frac{1+4i}{4+i}=$ نبسط ثم منسب $=\frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2}=\frac{2+11i-12}{4-3i+1}=\frac{-10+11i}{5-3i}$

$=\frac{-10+11i}{5-3i}\times\overbrace{\frac{5+3i}{5+3i}}^{\text{منسب}}=\frac{-50-30i+55i+33i^2}{25+9}=\frac{-50+25i-33}{34}=\frac{-83+25i}{34}$

$=-\frac{83}{34}+\frac{25i}{34}$

الاقواس في الأعداد المركبة.

$$(\text{عدد})^n \pm (\text{عدد})^n$$

- **نتخلص من الاس بالبداية نفتح مربع حدانية.**
- **إذا بينهم جمع بعد ما يحتاج تبقى الاقواس. بس إذا بينهم طرح لا ترفع الاقواس وانما لازم تدخل الإشارة على العدد الثاني وتغير الإشارات.**
- **ثم ترفع الاقواس وتصير عملية جمع وطرح.**

$$(1-2i)^2-(1-i)^2 = (1-4i+4i^2)-(1-2i+i^2)$$
$$= (1-4i-4)-(1-2i-1)$$
$$= (-3-4i)-(-2i)$$
$$= -3-4i+2i = -3-2i$$

$$(\text{عدد})^n \pm k(\text{عدد})^n$$

- ❖ **تخلص من الاس أولا والاقواس تبقى.**
- ❖ **ثم قم بإدخال k على العدد الثاني وترفع الاقواس وتصبح عملية جمع وطرح.**

$$(1-2i)^2-4(1-i)^2 = (1-4i+4i^2)+4(1-2i+i^2)$$
$$= (1-4i-4)+4(1-2i-1) = (-3-4i)+4(-2i)$$
$$= -3-4i-8i = -3-12i$$

$$(\text{عدد})^n(\text{عدد})^m \rightarrow \text{مثل} \rightarrow (1-2i)^2(2+i)^2 = (1-4i+4i^2)(4+4i+i^2)$$
$$= (1-4i-4)(4+4i-1)$$
$$= (-3-4i)(3+4i)$$
$$= -9-12i-12i-16i^2$$
$$= -9-24i+16$$
$$= 7-24i$$

- ○ **تخلص من الاس أولا والاقواس تبقى.**
- ○ **تضرب الاقواس بتوزيع الضرب على الجمع والطرح وبعد ما يحتاج تبقى الاقواس.**

$$\left(\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}\right)^n$$

- تضرب بالعامل المنسب داخل الجذر. لا تهتم بالاس.
- الناتج تنزل عليه الاس وينفتح مربع حدانية.

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{3-3i+i-i^2}{1+1}\right)^3 = \left(\frac{3-2i+1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{4}{2}-\frac{2i}{2}\right)^3 = (2-i)^3 = (2-i)^2(2-i) = (4-4i+i^2)(2-i)$$

$$= (4-4i-1)(2-i) = (3-4i)(2-i) = 6-3i-8i+4i^2 = 6-11i-4 = 2-11i$$

$$\frac{(\text{عدد})^n}{(\text{عدد})^n}$$

- تخلص من الاس أولا.او احصرهم بنفس الاس على كل العدد ويصبح مثل الحالة السابقة .
- ثم اضرب الناتج بالعامل المنسب للمقام.

$$\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)^2} = \frac{1-4i+4i^2}{1+4i+4i^2} = \frac{1-4i-4}{1+4i-4}$$

$$= \frac{-3-4i}{-3+4i}\times\frac{-3-4i}{-3-4i} = \frac{9+12i+12i+16i^2}{9+16}$$

$$= \frac{9+24i-16}{25} = \frac{-7+24i}{25} = -\frac{7}{25}+\frac{24i}{25}$$

$$(\text{عدد})(\text{عدد}) \pm \text{عدد}$$

- ✓ تخلص من عملية الضرب بفتح الاقواس ولا تكتب الاقواس واترك العدد الأخير بوحده.
- ✓ راح تصير عند عملية جمع او طرح فقط حسب الإشارات.

$$(1-i)(2+i)+3-7i = 2+i-2i-i^2+3-7i = 2-i+1+3-7i = 6-8i$$

المقادير ذات الاس الكبير

اذا كان العدد المركب مرفوع لاس كبير نستخدم معه طريقة تخفيض الاس بالتجزئة وجعله مربع حدانية مرفوع لاس معين.

1-اذا كان الاس فردي نسحب واحد والباقي يصير مربع حدانية مرفوع لاس معين

$$(a+bi)^n = [(a+bi)^2]^{\frac{n}{2}}(a+bi) = \text{مثال} = (1+i)^{13} = [(1+i)^2]^6(1+i)$$

2-اذا كان الاس زوجي مباشرة اجعل الاس مربع حدانية مرفوع لاس معين.

$$(a+bi)^n = [(a+bi)^2]^{\frac{n}{2}} = \text{مثال} = (1+i)^{12} = [(1+i)^2]^6$$

2013 خارج العراق ضع المقدار بالصيغة العادية للعدد المركب $\frac{(1-i)^{13}}{64}$

الحل

$$\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64} = \frac{[1-2i+i^2]^6(1-i)}{64} = \frac{[1-2i-1]^6(1-i)}{64}$$

$$= \frac{[-2i]^6(1-i)}{64} = \frac{(-2)^6\ i^6(1-i)}{64} = \frac{64\ i^4.i^2(1-i)}{64} = -1(1-i)$$

$$= -1+i$$

2012 د1 :- ضع المقدار بالصيغة العادية للعدد المركب $(1+i)^5-(1-i)^5$

الحل

$$(1+i)^5-(1-i)^5 = [(1+i)^2]^2(1+i) - [(1-i)^2]^2(1-i)$$

$$= [1+2i+i^2]^2(1+i) - [1-2i+i^2]^2(1-i)$$

$$= [1+2i-1]^2(1+i) - [1-2i-1]^2(1-i)$$

$$= [2i]^2(1+i) - [-2i]^2(1-i) = 4i^2(1+i) - (4i^2)(1-i)$$

$$= -4(1+i) + 4(1-i) = -4-4i+4-4i$$

$$= 0-8i$$

2004 د1 :- ضع المقدار بالصيغة العادية للعدد المركب $(1-\sqrt{3}i)^2-(2-\sqrt{3}i)^2$

الحل

$$(1-\sqrt{3}i)^2-(2-\sqrt{3}i)^2=(1-2\sqrt{3}i+3i^2)-(4-4\sqrt{3}\,i+3i^2)$$

$$=(1-2\sqrt{3}i-3)-(4-4\sqrt{3}\,i-3)$$

$$=(-2-2\sqrt{3}i)-(1-4\sqrt{3}\,i)$$

$$=-2-2\sqrt{3}i-1+4\sqrt{3}\,i$$

$$=-3+2\sqrt{3}\,i$$

2004 د1 :- ضع المقدار بالصيغة العادية للعدد المركب $\left(\frac{10+2\sqrt{-3}}{1+3\sqrt{-3}}\right)^2$

الحل

$$\left(\frac{10+2\sqrt{3}i}{1+3\sqrt{3}i}\right)^2=\left(\frac{10+2\sqrt{3}i}{1+3\sqrt{3}i}\times\frac{1-3\sqrt{3}i}{1-3\sqrt{3}i}\right)^2$$

$$=\left(\frac{10-30\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i-6.3i^2}{1+9.3}\right)^2=\left(\frac{10-28\sqrt{3}i+18}{1+27}\right)^2$$

$$=\left(\frac{28-28\sqrt{3}i}{28}\right)^2=\left(\frac{28}{28}-\frac{28\sqrt{3}i}{28}\right)^2$$

$$=(1-\sqrt{3}i)^2=1-2\sqrt{3}i+3i^2$$

$$=1-2\sqrt{3}i-3$$

$$=-2-2\sqrt{3}i$$

إيجاد قيم x,y الحقيقيتين

لدينا أربعة حالات من الأسئلة لايجاد قيم x,y.

الحالة الأولى

- إذا x+yi معزولات بحد بوحدهن. انقل كل الاعداد واترك x+yi بحيث

$(x+yi) =$ مقادير

- صفي المقادير لحد النهاية من عمليات جمع وطرح وضرب وكذا.
- بالتساوي في الاعداد المركبة حقيقي=حقيقي وتخيلي =تخيلي بدون i.

جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{6}{x+yi} - \frac{3+i}{2-i} = (1-i)^3$

الحل

هسه قيم x,y معزولات. اذن ننقل المقادير

$$\frac{6}{x+yi} = (1-i)^2(1-i) + \frac{3+i}{2-i}$$

$$\frac{6}{x+yi} = (1-2i+i^2)(1-i) + \frac{3+i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$

$$\frac{6}{x+yi} = (-2i)(1-i) + \frac{6+3i+2i+i^2}{4+1} = -2i+2i^2 + \frac{6-1+5i}{5}$$

$$\frac{6}{x+yi} = -2i-2+\frac{5+5i}{5} \qquad \frac{6}{x+yi} = -2i-2+1+i$$

$$\frac{6}{x+yi} = -1-i$$

طرفين ب وسطين

$$(x+yi)(-1-i) = 6$$

$\frac{\text{بعيد}}{\text{قريب}}$

$$x+yi = \frac{6}{-1-i} \times \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{-6+6i}{1+1} = \frac{-6+6i}{2} = -3+3i$$

ومن التساوي في c

X=-3 y=3 s={(-3,3)}

وزاري 2015- جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{1-i}{1+i}+(x+yi)=(1+2i)^2$

الحل

هسه قيم x,y معزولات. اذن ننقل المقادير

$$x+yi=(1+2i)^2-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$$

$$=1+4i+4i^2-\left(\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)$$

$$=1+4i-4-\left(\frac{1-i-i+i^2}{1+1}\right)$$

$$=-3+4i-\left(\frac{1-2i-1}{2}\right)$$

$$=-3+4i-\left(-\frac{2i}{2}\right)$$

$$x+yi=-3+4i+i$$

$$x+yi=-3+5i$$

ومن التساوي في c

X=-3 y=5 s={(-3,5)}

الحالة الثانية

قيم x,y متفرقات

- افتح الاقواس وتضرب المقادير.
- تبسط الاعداد بعد الضرب من عملية تغيير إشارة وجمع وطرح.
- تنقل المقادير بحيث الثوابت = المتغيرات . نقصد بالمتغيرات كل مقدار بيه x,y.
- ترتب الحدود بكل طرف بحيث الحقيقيات +التخيليات=الحقيقيات +التخيليات بالطرف الثاني.
- ومن خاصية التساوي نكول الحقيقي=الحقيقي --------1 التخيلي=التخيلي---------2.
- اذا المعادلتين درجة أولى ومابيهن xy ضرب الحل بالحذف. اما اذا درجة أولى وثانية او بين x,y ضرب فهنا الحل يكون بتعويض الدرجة الأولى بالثانية. ثم تجربة.

{{{ستكبر وسيخبرونك انك لست بحاجة للتفكير هم سيقومون بالتفكير نيابة عنك ما عليك سوى الإذعان و التنفيذ

لكن صدقني ان كل ما نعيشه من خراب هو بسبب تفكيرهم ومستواهم وعمالتهم. لذا لا تعر عقلك لاحد فكر انت حتى لو أخطأت فانك يوما ما ستكتشف نفسك}}} م.امجد

جد قيمة x,y الحقيقيتين $12+5i=(x+3i)(y-2i)$

الحل

هسه قيم x,y متفرقات اذن نفتح الاقواس

$$xy-2xi+3yi-6i^2=12+5i \quad \rightarrow \quad xy-2xi+3yi+6=12+5i$$

ننقل المتغيرات =الثوابت

$$xy-2xi+3yi=12-6+5i \;\rightarrow\rightarrow\; xy-2xi+3yi=6+5i$$ من خاصية التساوي

$xy=6$ ——1

$-2x+3y=5$ ——— 2

دائما من المعادلة الي بيها (x y) نطلع معادلة ونعوضها بالمعادلة الثانية . خوشن؟

$y=\frac{6}{x}$ ——1

هسه مو طلعت قيمة (y) اخذها اعوضها بالمعادلة الثانية.

$$-2x+3\left(\frac{6}{x}\right)=5 \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \{-2x+\frac{18}{x}=5\} \quad (-x)$$

$$2x^2-18=-5x \qquad \rightarrow 2x^2+5x-18=0$$

$$(2x+9)(x-2)=0$$

اما $2x-9=0 \qquad 2x=9 \qquad x=\frac{9}{2}$

او $x-2=0 \qquad x=2$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش .عندما

$$x=\frac{9}{2} \qquad y=\frac{6}{\frac{9}{2}}=\frac{6\,.\,2}{9}=\frac{4}{3}$$

$$x=2 \qquad y=\frac{6}{2}=3$$

$$s=\left\{\left(\frac{9}{2},\frac{4}{3}\right),(2,3)\right\}$$

كتاب -جد قيمة x,y الحقيقيتين $y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$

الحل

$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi + 2i^2$ ضرب الاقواس

$y + 5i = 2x^2 + 5xi - 2$ تبسيط $y + 5i = 2x^2 - 2 + 5xi$ ترتيب

الان من تساوي عددين مركبين في c. حقيقي=حقيقي وتخيلي =تخيلي بدون i.

$y = 2x^2 - 2 \quad (1)$

$5x = 5 \qquad x = \frac{5}{5} = 1$

ملحوظة : -أي معادلة فيها مجهول واحد تحل مباشرة ونجد المجهول .

نعوض x=1 في معادلة 1. $y = 2(1)^2 - 2 = 2 - 2 = 0$

$\therefore x = 1 \qquad y = 0 \qquad s = \{(1, 0)\}$

كتاب -جد قيمة x,y الحقيقيتين $8i = (x + 2i)(y + 2i) + 1$

الحل

$8i = xy + 2xi + 2yi + 4i^2 + 1$ ضرب الاقواس

$8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$ تبسيط $8i = xy + 2xi + 2yi - 3$ تبسيط

$3 + 8i = xy + 2xi + 2yi$ نقل

الان من تساوي عددين مركبين في c. حقيقي=حقيقي وتخيلي =تخيلي بدون i.

$xy = 3 \quad (1)$

$2x + 2y = 8 \qquad x + y = 4 \quad (2)$

دائما من المعادلة الي بيها (x y) نطلع معادلة ونعوضها بالمعادلة الثانية . خوشن؟

$y = \frac{3}{x}$ ——1

هسه مو طلعت قيمة (y) اخذها اعوضها بالمعادلة الثانية.

$x + \frac{3}{x} = 4 \quad]x \qquad x^2 + 3 = 4x \qquad x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1)=0$ اما $x-3=0$ $x=3$ او $x-1=0$ $x=1$

نعوض قيم x في معادلة 1 الاسهل

When

$x=3$ $y=\frac{3}{x}=\frac{3}{3}=1$, $x=1$ $y=\frac{3}{1}=3$

$\therefore\ s=\{(3,1)(1,3)\}$

2009-جد قيمة x,y الحقيقيتين $(2x+i)(y-2i)=-2-9i$

الحل

$2xy-4xi+yi-2i^2=-2-9i \rightarrow 2xy-4xi+yi+2=-2-9i$

$2xy+2-4xi+yi=-2-9i$ من خاصية التساوي

$2xy+2=-2$ ——1 $-4x+y=-9$ ——2

دائما من المعادلة الي بيها (xy) نطلع معادلة ونعوضها بالمعادلة الثانية . خوشن؟

$2xy+2=-2 \rightarrow\rightarrow\rightarrow 2xy=-2-2 \rightarrow 2xy=-4 \rightarrow y=\frac{-4}{2x} \rightarrow y=\frac{-2}{x}$ ——1

هسه مو طلعت قيمة (y) اخذها اعوضها بالمعادلة الثانية.

$-4x+\left(\frac{-2}{x}\right)=-9 \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \{-4x-\frac{2}{x}=-9\ \}\quad (-x)$

$4x^2+2=9x \rightarrow 4x^2-9x+2=0$

$(4x-1)(x-2)=0$

اما $4x-1=0$ $4x=1$ $x=\frac{1}{4}$

او $x-2=0$ $x=2$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش .عندما

$x=1$ $y=\frac{-2}{2}=-1$ $x=\frac{1}{4}$ $y=\frac{-2}{\frac{1}{4}}=\frac{-2.4}{1}=-8$

$s=\left\{\left(\frac{1}{4},-8\right)\ ,(1,-1)\right\}$

1999-جد قيمة x,y الحقيقيتين $(3x+2yi)^2=\frac{200}{4+3i}$

الحل

$9x^2+12xyi+4y^2i^2=\frac{200}{4+3i}\times\frac{4-3i}{4-3i}$ $\qquad 9x^2-4y^2+12xyi=\frac{200(4-3i)}{16+9}$

$9x^2-4y^2+12xyi=8(4-3i)$ $\qquad 9x^2-4y^2+12xyi=\frac{200(4-3i)}{25}$

$9x^2-4y^2+12xyi=32-24i$

هسه من خاصية التساوي .الحقيقي =الحقيقي $\qquad 9x^2-4y^2=32\ -(1)$

التخيلي بدون i =التخيلي . $y=\frac{-2}{x}\ ----2$ $\qquad y=\frac{-24}{12x}$ $\qquad 12xy=-24$

نعوض معادلة 2 في معادلة1 $\qquad 9x^2-4\left(\frac{-2}{x}\right)^2=32$ $\qquad 9x^2-4y^2=32\rightarrow$

$9x^2-4\frac{4}{x^2}=32\qquad \times\ x^2\qquad 9x^4-16=32x^2$

$9x^4-32x^2-16=0\qquad (9x^2+4)(x^2-4)=0$

اما $\qquad 9x^2+4=0\ \rightarrow 9x^2=-4$ يهمل لانه تخيلي

او $\qquad x^2-4=0\ \rightarrow x^2=4\qquad x=\mp2$

هسه نعوض قيم x بس كون بأسهل معادلة. واكيد الاسهل هي معادلة 2.

$x=-2\rightarrow\qquad x=\frac{-2}{-2}=1\qquad x=2\rightarrow\qquad y=\frac{-2}{2}=-1$

$S=\{(-2,1),(2,-1)\}$

1-اذا طلع عند بالتجربة (x^2+ رقم) تهمل لان قيم x,y لازم حقيقية .

2-اذا طلع عندك رقم $=x^2$ من تأخذ الجذر لازم تخلي ($\mp$) .

امقت هؤلاء الذين يرثون لأنفسهم ويشعرون بأنهم ضحية طوال الوقت. احمد كمال الطويل.

كتاب-جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

الحل

نضرب بالعامل المنسب ونبسط كلش لما نصفيها نهائيا.

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}\right)y=\frac{1}{i}\times\frac{-i}{-i}$$

$$\left(\frac{2-2i-i+i^2}{1+1}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}\right)y=-i$$

$$\left(\frac{2-3i-1}{2}\right)x+\left(\frac{6-5i-1}{5}\right)y=-i$$

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y=-i \qquad \left(\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}\right)x+\left(\frac{5}{5}-\frac{5i}{5}\right)y=-i$$

$$\frac{1}{2}x-\frac{3xi}{2}+y-yi=-i \qquad]\times 2$$

نرتب الحدود ونضرب المعادلة في 2 حتى نتخلص من الكسور

$$x-3xi+2y-2yi=0-2i$$

$$x+2y-3xi-2yi=0-2i$$

من خاصية التساوي في c.

$$x+2y=0------1$$

$$-3x-2y=-2---2$$

ما دام المعادلتين اثنينهن درجة اولى راح نحلهم بطريقة الحذف.

==================

$$-2x=-2 \qquad x=1$$

نعوض في معادلة 1 لان اسهل .

$$1+2y=0 \qquad 2y=-1 \qquad y=\frac{-1}{2}$$

$$S=\left\{\left(1,\frac{-1}{2}\right)\right\}$$

2009-جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{125}{11+2i}x+(1-i)^2y=11$

الحل

$$\left(\frac{125}{11+2i}\times\frac{11-2i}{11-2i}\right)x+(1-2i+i^2)y=11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{121+4}\right)x+(1-2i-1)y=11 \rightarrow\rightarrow\rightarrow$$ هسه نختصر البسط مع المقام

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x-2iy=11 \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow (11+2i)x-2yi=11$$

$11x-2xi-2yi=11+0i \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ من خاصية التساوي

$11x=11 \qquad x=\frac{11}{11}=1 \qquad x=1$

$-2x-2y=0 \qquad \rightarrow\rightarrow\rightarrow x$ نعوض قيمة $\qquad -2(1)-2y=0 \rightarrow -2y=2$

$y=\frac{2}{-2}=-1 \qquad$ S={(1,-1)}

2017-جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{1-i}{1+i}x+(1+3i)^2y=(1-i)(1+3i)$

الحل

$$\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}x+(1+6i+9i^2)y=1+3i-i-3i^2$$

$$\frac{1-i-i+i^2}{1+1}x+(1+6i-9)y=1+2i+3$$

$$\frac{1-2i-1}{2}x+(-8+6i)y=4+2i \qquad \frac{-2i}{2}x+(-8+6i)y=4+2$$

$-xi-8y+6yi=4+2i$ من خاصية التساوي

$-x+6y=2 \quad ---(1) \qquad -8y=4 \qquad y=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$

نعوض في معادلة 1 .

$-x+6\left(-\frac{1}{2}\right)=2 \qquad -x-3=2 \qquad x=-3-2=-5 \qquad s=\left\{\left(-5,\frac{1}{2}\right)\right\}$

الحالة الثالثة

عندما يعطي عددين مترافقين

- ❖ نضع يساوي بين العددين ونضع خط المرافق على احد العددين $\frac{c+di}{e+fi}=\overline{\left(\frac{x+yi}{a+bi}\right)}$ ثم نغير إشارة البسط والمقام بسبب المرافق
- ❖ نستخدم وسطين بطرفين.
- ❖ اذا قيم x,y معزولات يفضل تحصرهم بقوس ولا تضربهم باي مقدار. وانما تكول

$$x+yi=\frac{\text{بعيد}}{\text{قريب}}$$

ثم نضرب بمرافق المقام (العامل المنسب) ومن خاصية التساوي نجد x,y مباشرة.

- ❖ اذا متفرقات راح يكون وسطين بطرفين وحل مثل حل المتفرقات ويكون الحل مالتها على الاغلب بالحذف

كتاب-اذا كان $\frac{3-2i}{i}, \frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيم x,y

الحل

$$\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}=\frac{3-2i}{i} \qquad \frac{x+yi}{1-5i}=\frac{3-2i}{i}$$ وسطين بطرفين

$$x+yi=\frac{3-2i-15i+10i^2}{i}=\frac{3-17i-10}{i} \qquad (x+yi)i=(1-5i)(3-2i)$$

$$x+yi=\frac{-7-17i}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{7i+17i^2}{1}=-17+7i$$

ومن خاصية التساوي في c.

$$x=-17 \qquad y=7 \qquad s=\{(-17,7)\}$$

2015-د3-اذا كان $\frac{6}{x+yi}, \frac{3+i}{2-i}$ مترافقان فجد قيم x,y

الحل

$$\overline{\left(\frac{3+i}{2-i}\right)}=\frac{6}{x+yi}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\frac{3-i}{2+i}=\frac{6}{x+yi}$$

قيم x,y معزولات لذلك نقلب البسط مقام للطرفين ونسحب مقام x,y للطرف الثاني بطريقة الوسطين في طرفين .

$$\text{x}+\text{yi}=\frac{6(2+i)}{3-i}=\frac{12+6i}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{36+12i+18i+6i^2}{9+1}$$

$$= \frac{36-6+30i}{10} = \frac{30+30i}{10} = 3+3i$$

من خاصية التساوي $x = 3 \quad y = 3 \qquad s = \{(3,3)\}.$

2012-د1-اذا كان $\frac{2+i}{3-i}, \frac{5}{x+yi}$ مترافقان فجد قيم x,y

الحل

$$\overline{\left(\frac{2+i}{3-i}\right)} = \frac{5}{x+yi} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{2-i}{3+i} = \frac{5}{x+yi}$$

قيم x,y معزولات لذلك نقلب البسط مقام للطرفين ونسحب مقام x,y للطرف الثاني بطريقة الوسطين في طرفين.

$$\mathrm{x+yi} = \frac{5(3+i)}{2-i} = \frac{15+5i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$

$$= \frac{30+15i+10i+5i^2}{4+1} = \frac{30-5+25i}{5} = \frac{25+25i}{5} = 5+5i$$

من خاصية التساوي $x = 5 \quad y = 5 \qquad s = \{(5,5)\}$

طرق التحليل للحدوديات

1-تحليل فرق مربعين

$x^2 - 4 = $ (جذر الاول − جذر الثاني) (جذر الاول + جذر الثاني) $= (x-2)(x+2)$

$$x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

2-تحليل مجموع مربعين (x^2+4) لا يمكن تحليله في الدراسة السابقة ولكن سنحلله هنا في الاعداد المركبة .

3-تحليل فرق ومجموع مكعبين حيث يمكن تحليل النوعين كلاهما في المكعبين.

$x^3 \pm 27 = $ (جذر الاول ± جذر الثاني) (مربع الاول ∓ الاول × الثاني + مربع الثاني)

الإشارة في القوس الأول هي نفس إشارة السؤال والقوس الثاني الإشارة الأولى عكس اشارة السؤال والثانية دائما موجب.

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

4-المعادلة الثلاثية تحل بالتجربة اذا كدرنا نطلع الحد الوسط واذا ما كدرنا بالدستور.

تحليل مجموع مربعين

- طريقة تحليل مجموع مربعين هي ضرب الحد الثاني ب$(1=-i^2)$ ليتحول الى فرق مربعين وبعدين نحلل فرق مربعين. لاحظ: -

$$x^2+y^2=x^2-y^2i^2=(x-yi)(x+yi)$$

- وهذا نكدر نحلل كل مجموع مربعين. حتى مجموع او فرق مكعبين فيه i حسب القاعدة التالية: -

$$x^3+y^3i=x^3-y^3i^3=(x-yi)(x^2+xyi+y^2i^2)$$

$$=(x-yi)(x^2+xyi-y^2)$$

- اذا طلب تحليل عدد بطريقة تحليل مجموع مربعين شنسوي؟ نحول العدد الى مجموع عددين ثم نحول الجمع الى طرح ونحلل فرق مربعين.

س: - حلل الى عاملين بصورة a+bi كل من الاعداد التالية 29,41,125,50,85 بحيث ان a,b اعداد نسبية.

الحل

المطلوب ان تكون الاعداد نسبية يعني لازم ارقام لها جذر شرط. اذن نحلل.

$$85=81+4=81-4i^2=(9-2i)(9+2i)$$

شوف اختاريت رقمين اجمعهم يصير=85 واثنينهم الهم جذر تربيعي. لان هو شارط لازم اعداد نسبية.

شوف لو ما محدد نسبية راح اختار بكيفي بس جمعهم 85

$$85=80+5=80-5i^2=(\sqrt{80}-\sqrt{5}i)(\sqrt{80}+\sqrt{5}i)$$

وهكذا. هسه نرجع لموضوعنا، شرط نسبية

$$50=25+25=25-25i^2=(5-5i)(5+5i)$$

$$125=100+25=100-25i^2=(10-5i)(10+5i)$$

$$125=121+4=121-4i^2=(11-2i)(11+2i)$$

$$41=16+25=16-25i^2=(4-5i)(4+5i)$$

$$29=25+4=25-4i^2=(5-2i)(5+2i)$$

إ-تحليل الحدوديات العادية.

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

$$x^2+4=x^2-4i^2=(x-2i)(x+2i)$$

$$y^4-16=(y^2-4)(y^2+4)$$

$$=(y^2-4)(y^2-4i^2)$$

$$=(y-2)(y+2)(y+2i)(y-2i)$$

ب- اكمال مربع عندما نجد ثلاثة حدود والحد الثالث رقم فقط خال من المتغير x. نحلل بطريقتين

1-تجزئة الجزء الأخير بحيث ناخذ منه $(\text{نصف معامل} x)^2$ ليصبح مربع كامل ثم نعمل على تحليل مجموع مربعين.

$$x^2+4x+20=x^2+4x+4+16=(x+2)^2+16=(x+2)^2-16i^2$$

$$=(x+2)^2-16i^2=[(x+2)-4i][(x+2)+4i]$$

2-طريقة ثانية بإضافة وطرح نصف معامل x بعد تربيعه ثم نكمل نفس الخطوات أعلاه.

$$x^2+4x+20=x^2+4x+4-4+20=x^2+4x+4+16$$

$$=(x+2)^2+16=(x+2)^2-16i^2$$

$$=(x+2)^2-16i^2=[(x+2)-4i][(x+2)+4i]$$

ج-عندما نجد ثلاثة حدود والحد الوسط فيه i .نضرب الحد الأخير ب $(-i^2)$ ثم نحلل تجربة .

$$x^2+4xi-3=x^2+4xi+3i^2=(x+3i)(x+i)$$

د-اذا كان لديك مجموع او فرق مكعبين يحتوي على i نضرب ب $(-i^2)$ ثم نحلل كفرق او مجموع مكعبين.

$$x^3+125i=x^3-125i^3=(x-5i)(x^2+5xi+25i^2)$$

$$=(x-5i)(x^2+5yi-25)$$

{{{ ولدت حرا في هذه الحياة, فتلقفوك ووضعوا اسوارهم وحدودهم واغلالهم, واخبروك الا تتجاوزها, لكن ما هذه الحدود الا حدود مصلحهم وفوائدهم. ناقش وفكر بكل حد وكل قيد ولا تخش شيء فلم يعد هنالك شيء لتخسره فقد خسرت الكثير وربحوا منك الكثير}}} م.امجد

الحالة الرابعة والأخيرة من موضوع إيجاد قيم x,y

اذا اكو تحليل واختصار بموضوع x,y

- لازم نحلل ثم نختصر حسب طرق التحليل فرق او مجموع مكعبين او مربعين الي ذكرتها فوك.
- بعد الاختصار نطبق خطوات المتفرقات.

2003-د3:-جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$

الحل

نضرب الطرف الايسر بالمرافق ,والطرف الأيمن نحلل البسط مجموع مربعين بضربه ب$-i^2$

$$\frac{y}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i} \to\to\to$$

$$\frac{y-yi}{2} = \frac{(x-2i)(x+2i)}{x+2i} \to\to\to \frac{y-yi}{2} = x-2i \qquad \times 2$$

$y - yi = 2x - 4i \to\to\to\to\to$ من خاصية التساوي

$y = 2x ----1 \qquad -y = -4 \qquad y = 4$ نعوض في معادلة1

$4 = 2x \qquad x = 2 \qquad s = \{(2,4)\}$

1998-د1:-جد قيمة x,y الحقيقيتين $(2+xi)(-x+i) = \frac{9y^2+49}{3y+7i}$

الحل

نضرب الاقواس بالطرف الايسر ,والطرف الأيمن نحلل البسط مجموع مربعين بضربه ب$-i^2$

$$-2x + 2i - x^2 i + xi^2 = \frac{9y^2 - 49i^2}{3y+7i}$$ طرف فتح الاقواس و طرف تحليل

$$-2x + 2i - x^2 i - x = \frac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$$

$-2x - x + 2i - x^2 i = 3y + 7i \qquad -3x + 2i - x^2 i = 3y + 7i$

هسه من خاصية التساوي.

الحقيقي =الحقيقي $\qquad 3y = -3x \qquad y = -x \quad ---1$

التخيلي بدون i =التخيلي.

$2 - x^2 = -7 \qquad x^2 = 2 + 7 = 9 \qquad x^2 = 9 \qquad x = \mp 3$

نعوض في معادلة 1

$x = 3 \rightarrow \qquad y = -3 \qquad x = -3 \rightarrow \qquad y = 3 \qquad S = \{(3, -3), (-3, 3)\}$

1998-د1:-جد قيمة x,y الحقيقيتين $(x + 2i)(x - i) = \frac{121 + 9y^2}{11 + 3yi}$

الحل

نضرب الاقواس بالطرف الايسر ,والطرف الأيمن نحلل البسط مجموع مربعين بضربه ب $-i^2$

$$x^2 - xi + 2xi - 2i^2 = \frac{121 - 9y^2 i^2}{11 + 3yi}$$ طرف فتح الاقواس و طرف تحليل

$$x^2 + 2 + xi = \frac{(11 - 3yi)(11 + 3yi)}{11 + 3yi}$$

$$x^2 + 2 + xi = 11 - 3yi$$

هسه من خاصية التساوي.

الحقيقي =الحقيقي

$x^2 + 2 = 11 \qquad x^2 = 11 - 2 = 9 \qquad x = \pm 3$

التخيلي بدون I =التخيلي.

$x = -3y \qquad y = -\frac{x}{3} - - - - -1$

نعوض في معادلة 1

$x = 3 \rightarrow \qquad y = -\frac{3}{3} = -1 \qquad x = -3 \rightarrow \qquad y = -\frac{-3}{3} = 1$

$$S = \{(3, -1), (-3, 1)\}$$

{{{ انت مكروه بمقدار ما تفكر وتناقش, ومحبوب بمقدار ما تتبع وتنفذ}}}

{{{يريد الشرقي ان تقوم طبيبة وممرضة بمداواة وتوليد زوجته, لكنه يمنع ابنته واخته من التعليم}}} .

{{{في عالمنا الشرقي, يظن الكثير انهم محسودون ويعيشون حياتهم على الخوف والكره والحقد لكنهم لم يتسائلوا يوما ما الهدف ان نعيش في خوف. هو ذا العالم وهذه الحياة ولا حاجة لسوء الظن بالأخرين}}} م.امجد

خارجي:-جد قيمة x,y الحقيقيتين $(2x+i)(x+2i)=\frac{y^3+125i}{y^2+5yi-25}$

الحل

الجهة اليمنى تحليل مكعبين بس نحتاج نغير إشارة ونضيف i^2 ثم نحلل . واليسرى ضرب اقواس.

$$2x+4xi+xi+2i^2=\frac{y^3-125i^3}{y^2+5yi-25}$$

$$2x+5xi-2=\frac{(y-5i)(y^2+5yi+25i^2)}{y^2+5yi-25}$$

$$2x+5xi-2=\frac{(y-5i)(y^2+5yi-25)}{y^2+5yi-25}$$ نختصر

$2x+5xi-2=y-5i$ ننقل

$2x+5xi-y=2-5i$ نرتب

$2x-y+5xi=2-5i$ بالتساوي

$2x-y=2 \quad (1)$

$5x=-5 \qquad x=-\frac{5}{5}=-1$

$sub\ in(1)$

$2(-1)-y=2 \qquad -2-y=2$

$-2-2=y$

$y=-4$

$s=\{(-1,-4)\}$

خارجي:-جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{x^2-6xi-8}{x-4i}=3-yi$

الحل

اذا لكيت 3حدود والحد الوسط فيه i تكدر تحلل تجربة بس غير إشارة الحد الأخير وضيف i^2

$$\frac{x^2-6xi+8i^2}{x-4i}=3-yi \qquad \frac{(x-4i)(x-2i)}{x-4i}=3-yi$$

$x-2i=3-yi \qquad x+yi=3+2i$ بالتساوي

$x=3 \qquad y=2 \qquad s=\{(3,2)\}$

2018-احيائي –خارج العراق :-جد قيمة x,y الحقيقيتين $\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$

الحل

المقام الايسر نضربه ب $-i^2$ ونغير إشارة ثم نحلل ونختصر .ثم نضرب وسطين بطرفين

$$\frac{x-yi}{x^2-y^2i^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$$

$$\frac{x-yi}{(x-yi)(x+yi)}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)} \rightarrow \frac{1}{(x+yi)}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$$

$$x+yi=(1+xi)(3+i)$$

$$x+yi=3+i+3xi+xi^2$$

$$x+yi=3+i+3xi-x$$ ننقل

$x+x+yi-3xi=3+i \qquad 2x+yi-3xi=3+i$ بالتساوي

$2x=3 \qquad x=\frac{3}{2}$

$y-3x=1 \quad (1) \qquad sub\ x=\frac{3}{2} \quad in\ (1)$

$y-3.\frac{3}{2}=1 \qquad y=1+\frac{9}{2}=\frac{2+9}{2}=\frac{11}{2}$

S={($\frac{3}{2}$, $\frac{11}{2}$)}

ملحوظة :- اذا لكيت اعداد مركبة بشكل كسور بينهم جمع او طرح $\frac{a}{b}\mp\frac{c}{d}$. وطالب منك تبسيطها شتسوي؟

- نوحد مقامات بالمقص ثم عامل منسب اذا بقت (i) في المقام.
- او كل عدد نضربه بالعامل المنسب ثم نوحد مقامات.

توحيد المقامات بالمقص بشرط كسور وبينهم جمع وطرح

$$\frac{a}{b}\mp\frac{c}{d}=\frac{a\times d\mp c\times b}{b\times d}$$

كتاب-تمارين1-1:- اثبت ان $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

الحل

دائما ناخذ الطرف الايسر. دائما نتخلص من الزعيم بالرياضيات الي هو الاس.

$$lHS=\frac{1}{4-4i+i^2}-\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$$

$$=\frac{(3+4i)-(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i-3+4i}{3^2+4^2}=\frac{8i}{25}$$ ثم مقص

2012-د3:-اثبت ان $\frac{(1-i)^2}{1+i}-\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

الحل

$$LHS=\frac{1-2i+i^2}{1+i}+\frac{1+2i+i^2}{1-i}=\frac{1-2i-1}{1+i}+\frac{1+2i-1}{1-i}=\frac{-2i}{1+i}+\frac{2i}{1-i}$$

$$=\frac{-2i(1-i)+2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i+2i^2+2i+2i^2}{1+1}=\frac{-2i-2+2i-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$ مقص

الجذر التربيعي للعدد المركب

- اذا كان العدد حقيقي موجب نتبع $c^2=a \qquad c=\pm\sqrt{a}$
- اذا كان العدد حقيقي سالب نتبع $c^2=-a \qquad c=\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$
- اذا كان العدد مركب يعني يحتوي على i بمجرد ان تشوف العدد فيه i مباشرة نتبع طريقة الحل الثابتة:-
- نفرض $\sqrt{a+bi}=x+yi$
- بالتربيع $a+bi=(x+yi)^2$
- من خاصية التساوي $a+bi=x^2-y^2+2xyi$
- (1) $x^2-y^2=a$
- (2) $2xy=b \qquad y=\frac{b}{2x}$
- ثم عوض معادلة (2) في (1) وتحلل تجربة او فرق مربعين. يهمل واحد وتاخذ واحد منهم وتطلع قيم x. ثم تعوض قيم x في معادلة (2) وتطلع قيم y.
- المطلوب ليس قيم x,y وانما الجذر لذلك الحل النهائي:-

$$\sqrt{a+bi}=x_{\text{قيم}}+y_{\text{قيم}}\,i$$

كتاب: - جد الجذور التربيعية للأعداد التالية $-25, -17, 8+6i, -i, 8i$

الحل

- $c^2 = -25$ $c = \pm\sqrt{-17} = \pm\sqrt{17}i$
- هسه نوجد الجذر. مادام العدد بيه زاذا نستخدم الفرضية.

نفرض $x + yi = \sqrt{8+6i}$

بالتربيع $x^2 - y^2 + 2xyi = 8 + 6i$

بالتساوي $x^2 - y^2 = 8$ (1)

نربعها و نعوضها $2xy = 6$ $y = \frac{3}{x}$ (2)

$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8$ $\times x^2$ $\rightarrow x^4 - 9 = 8x^2$ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$

اما $x^2 + 1 = 0$ يهمل

او $x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9$ $x = \mp 3$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش .

$x = 3 \rightarrow y = \frac{3}{3} = 1$, $x = -3 \rightarrow y = \frac{3}{-3} = -1$

$$\sqrt{8+6i} = 3 + i \ , -3 - i$$

- هسه نوجد الجذر. مادام العدد بيه زاذا نستخدم الفرضية.

نفرض $x + yi = \sqrt{-i}$

بالتربيع $x^2 - y^2 + 2xyi = 0 - i$

بالتساوي $x^2 - y^2 = 0$ (1)

نربعها و نعوضها $2xy = -1$ $y = \frac{-1}{2x}$ (2)

$x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0 \quad \times 4x^2 \quad \rightarrow 4x^4 - 1 = 0$

$(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$ يهمل $2x^2 + 1 = 0$

او $2x^2 - 1 = 0 \quad 2x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{0 - i} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

نفرض $x + yi = \sqrt{8i}$

بالتربيع $x^2 - y^2 + 2xyi = 0 + 8i$

بالتساوي $x^2 - y^2 = 0 \quad (1)$

نربعها و نعوضها $2xy = 8 \quad \div 2 \rightarrow \quad y = \frac{4}{x} \quad (2)$

$x^2 - \frac{16}{x^2} = 0 \quad \times x^2 \quad \rightarrow x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

اما $x^2 + 4 = 0$ يهمل

او $x^2 - 4 = 0 \quad x^2 = 4 \quad x = \mp 2$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش.

$x = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{2} = 2 \qquad x = -2 \quad y = \frac{4}{-2} = -2$

$$\sqrt{0 + 8i} = 2 + 2i, -2 - 2i$$

كتاب-تمارين2-1: - جد الجذور التربيعية للأعداد التالية $6i, 7+24i, \frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

الحل

1- هسه نوجد الجذر. مادام العدد بيه i اذا نستخدم الفرضية.

$x + yi = \sqrt{6i}$ نفرض

$x^2 - y^2 + 2xyi = 0 + 6i$ بالتربيع

$x^2 - y^2 = 0 \qquad (1)$ بالتساوي

$2xy = 6 \qquad \div 2 \rightarrow \qquad y = \frac{3}{x} \qquad (2)$ نربعها و نعوضها

$x^2 - \frac{9}{x^2} = 0 \qquad \times x^2 \qquad \rightarrow x^4 - 9 = 0$

$(x^2-3)(x^2+3) = 0$

اما $x^2 + 3 = 0$ يهمل

او $x^2 - 3 = 0 \qquad x^2 = 3 \qquad x = \mp\sqrt{3}$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش.

$x = \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad x = -\sqrt{3} \qquad y = \frac{3}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

$$\sqrt{0+6i} = \sqrt{3} + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

$x + yi = \sqrt{7+24i}$ نفرض

$x^2 - y^2 + 2xyi = 7 + 24i$ بالتربيع

$x^2 - y^2 = 7 \qquad (1)$ بالتساوي

$2xy = 24 \qquad \div 2 \rightarrow \qquad y = \frac{12}{x} \qquad (2)$ نربعها و نعوضها

$x^2 - \frac{144}{x^2} = 7 \qquad \} \times x^2 \qquad \rightarrow x^4 - 144 = 7x^2 \qquad \rightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$(x^2-16)(x^2+9) = 0$

اما $x^2+9=0$ يهمل

او $x^2-16=0$ $\quad x^2=16$ $\quad x=\mp4$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش.

$x=4 \rightarrow y=\frac{12}{4}=3$ $\qquad \mathrm{x}=-4 \quad y=\frac{12}{-4}=-3$

$$\sqrt{7+24i}=4+3i,-4-3i$$

ملاحظة: - ما يصير نطبق خطوات الجذر التربيعي الا العدد بالصيغة العادية. وإذا كسر او مرفوع لاس او اقواس مضروبة لازم نتخلص منهم ونبسط ويصير صيغة عادية وبعدين نبلش. شوف هذا السؤال.

- **نضرب العدد بالعامل المنسب**

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\times\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{1+3}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4\sqrt{3}i}{4}=1+\sqrt{3}i$$

هسه نوجد الجذر. مادام العدد بيه i اذا نستخدم الفرضية.

نفرض $x+yi=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

بالتربيع $x^2-y^2+2xyi=1+\sqrt{3}i$

بالتساوي $x^2-y^2=1 \qquad (1)$

نربعها و نعوضها $2xy=\sqrt{3} \qquad y=\frac{\sqrt{3}}{2x} \qquad (2)$

$x^2-\frac{3}{4x^2}=1 \qquad \times 4x^2 \qquad \rightarrow 4x^4-3=4x^2 \qquad 4x^4-4x^2-3=0$

$(2x^2-3)(2x^2+1)=0$

اما $2x^2+1=0$ يهمل

او $2x^2-3=0$ $\quad 2x^2=3$ $\quad \mathrm{x}^2=\frac{3}{2}$ $\quad x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش .

$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{1+\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

حل المعادلة التربيعية الثنائية الحدود في الاعداد المركبة

المعادلة التربيعية ثنائية الحدود لها طرق عدة للحل لكن ابسطها هي الطريقة التالية: -

$x^2\pm a=0 \qquad x^2=\pm a \qquad$ $\sqrt{\text{للطرفين}}$ $\qquad x=\pm\sqrt{a}$

اذا كانت a سالبة لا تنسى ان تضع (i) لناتج الجذر.

كتاب-تمارين2-1: - جد مجموعة حل المعادلة التربيعية وبين أي منها يكون جذراها مترافقان

$z^2=-12 \quad , \quad 4z^2+25=0$

الحل

الطريقة الأولى: - بالجذر للطرفين

$z^2=-12$ $\qquad \sqrt{\text{للطرفين}} \qquad$ $x=\pm\sqrt{-12}=\pm 2\sqrt{3}i$

الطريقة الثانية: -مجموع مربعين وضربه ب$(-i^2)$

$z^2+12=0 \qquad z^2-12i^2=0 \qquad (z-2\sqrt{3}i)(z+2\sqrt{3}i)=0$

اما $\qquad z-2\sqrt{3}i=0 \qquad z=2\sqrt{3}i$

او $\qquad z+2\sqrt{3}i=0 \qquad z=2\sqrt{3}i$

$s=\{0+2\sqrt{3}i,0-2\sqrt{3}i\}$ الجذران مترافقان

$4z^2+25=0$

الطريقة الأولى: - بالجذر للطرفين بس لازم نرتب المعادلة

$$4z^2 = -25 \qquad z^2 = -\frac{25}{4} \qquad \sqrt{\text{للطرفين}} \qquad z = \pm\frac{5i}{2}$$

الطريقة الثانية: -مجموع مربعين وضربه ب$(-i^2)$ واجب

طريقة ثالثة: - بالدستور بعدما نجعل المعادلة ثلاثية واجب

$$4z^2 + 0z + 25 = 0$$

$$s = \left\{0 + \frac{5i}{2}, 0 - \frac{5i}{2}\right\}$$ الجذران مترافقان

حل المعادلة التربيعية الثلاثية في الاعداد المركبة

اذا المعادلة بهاي الصورة تكدر تحللها تجربة بشرط تتأكد من الحد الوسط

$$z^2 \pm bz \pm ai(c + di) = 0$$

$$(z \pm ai)(z \pm (c + di)) = 0$$

ثم الحل بطريقة اما او ونجد قيم z.

اذا المعادلة تحتوي على i في الحد الوسط. تكدر تغير إشارة الحد الأخير وتضيف i^2 ثم تحلل تجربة .

$$z^2 \pm bzi \pm a = 0$$

$$z^2 \pm bzi \mp ai^2 = 0$$

- ❖ اذا المعادلة ليست بالصور أعلاه وماكدرنا نطلع الحد الوسط نحلها بالدستور.
- ❖ بعد ما نصفر المعادلة شرط ثم نحدد قيم A,B,C .تحذف x^2 والباقي المضروب بيها يمثل a ثم تحذف x والباقي يمثل b اما المقدار الخالي من x شكد ما كان يمثل c.
- ❖ نطبق القانون التالي لايجاد قيمة x وهو

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ❖ وهنا عدنا الجذر شلون نتعامل وياه ؟ بيه 3 حالات خل نشرحها بالتفصيل .

i) اذا طلع ناتج داخل الجذر موجب فماكو اي اشكال نطلع اله الجذر وهايهيه.

ii) اذا طلع داخل الجذر عدد سالب بس نحول السالب الى i لان عدد تخيلي .

iii) اذا طلع داخل الجذر بيه (i) فهنا ناخذ فاصل ونواصل نروح نطلع قيمة الجذر التربيعي حسب خطوات الجذر التربيعي ثم نجيب الناتج ونعوضه بالدستور .ونواصل الحل .

- ❖ نكتب مجموعة حل x .
- ❖ والدستور نكدر نحل بيه كل المعادلات التربيعية الثلاثية وخلاص.

كتاب-امثلة -تمارين2-1: جد مجموعة حلول المعادلات التربيعية وبين أي منها جذراها مترافقان

الحل

باوع وانظر هنا اذا تحلل تجربة ما يطلع الحد الوسط ابدا لذلك نروح للدستور

$x^2+4x+5=0$ $\quad A=1 \quad B=4 \quad C=5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(1)(5)}}{2.1}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-4\pm2i}{2}$$

$$x=\frac{-4}{2}\pm\frac{2i}{2}=-2\pm i \qquad x=-2+i \qquad x=-2-i$$

$s=\{-2+i,-2-i\}$ الجذران مترافقان

باوع وانظر هنا اذا تحلل تجربة ما يطلع الحد الوسط ابدا لذلك نروح للدستور

$2z^2-5z+13=0$ $\quad A=2 \quad B=-5 \quad C=13$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(2)(13)}}{2.2}=\frac{5\pm\sqrt{25-104}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{-79}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{79}i}{4}$$

$$z=\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{79}i}{4}$$

$s=\left\{\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{79}i}{4},z=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{79}i}{4}\right\}$ الجذران مترافقان

باوع وانظر اذا اكو (i) بالمعادلة التربيعية هنا اذا تحلل تجربة ما يطلع الحد الوسط ابدا. لذلك نروح للدستور

$z^2-3z+3+i=0$ $\quad A=1 \quad B=-3 \quad C=3+i$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{9-4.1.(3+i)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9-12-4i}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-3-4i}}{2}$$

نروح نطلع قيمة الجذر ونرجع نعوضها.

هسه نوجد الجذر. مادام العدد بيه i اذا نستخدم الفرضية .

$x+yi=\sqrt{-3-4i}$ نفرض $\rightarrow$ $x^2-y^2+2xyi=-3-4i$ بالتربيع

$x^2 - y^2 = -3 \quad (1)$ بالتساوي

$2xy = -4 \quad y = \frac{-2}{x} \quad (2)$ نربعها و نعوضها

$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \quad \times x^2 \quad \rightarrow x^4 - 4 = -3x^2 \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

اما $x^2 + 4 = 0$ يهمل

او $x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = 1 \quad x = \mp 1$

هسه نروح نطلع قيم y $x = 1 \rightarrow y = \frac{-2}{1} = -2 \quad , x = -1 \rightarrow y = -\frac{2}{-1} = 2$

$\sqrt{-3 - 4i} = 1 - 2i, -1 + 2i$

هسه نعوض هذا الناتج مالت الجذر بالدستور. اما

$$z = \begin{cases} \frac{3 + 1 - 2i}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2i}{2} = 2 - i \\ \frac{3 - 1 + 2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

$s = \{2 - i, 1 + i\}$ غير مترافقين

$z^2 + 2z + i(2 - i) = 0$

الطريقة الأولى: - باوع وانظر هذا هسه تنطبق عليه الحالة الأولى ام الاقواس يعني نكدر نحلل بالتجربة.

$(z + i)(z + (2 - i)) = 0 \quad z + i = 0 \quad z = -i$

$z + (2 - i) = 0 \quad z = -2 + i$

الطريقة الثانية: -بالدستور بعدما نرتب المعادلة ونفتح الاقواس

$z^2 + 2z + i(2 - i) = 0 \quad z^2 + 2z + 2i - i^2 = 0 \quad z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$

$z^2 + 2z + 1 + 2i = 0 \quad A = 1 \quad B = 2 \quad C = 1 + 2i$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(1 + 2i)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 - 8i}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0 - 8i}}{2}$$

نروح نطلع قيمة الجذر ونرجع نعوضها.

$x + yi = \sqrt{-8i}$ نفرض

$x^2 - y^2 + 2xyi = 0 - 8i$ بالتربيع

$x^2 - y^2 = 0 \quad (1)$ بالتساوي

$2xy = -8 \quad \div 2 \rightarrow \quad y = \frac{-4}{x} \quad (2)$ نربعها و نعوضها

$x^2 - \frac{16}{x^2} = 0 \quad \times x^2 \quad \rightarrow x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

اما $x^2 + 4 = 0$ يهمل

او $x^2 - 4 = 0 \quad x^2 = 4 \quad x = \mp 2$

هسه نروح نطلع قيم y من معادلة 2 غصبا عليك لان بسيطة كلش .

$x = 2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x = -2 \quad y = \frac{-4}{-2} = 2$

$$\sqrt{0 - 8i} = 2 - 2i, -2 + 2i$$

هسه نعوض هذا الناتج مالت الجذر بالدستور. اما

$$z = \begin{cases} \frac{-2+2-2i}{2} = -\frac{2i}{2} = -i \\ \frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{2i}{2} = -2 + i \end{cases}$$

$s = \{-2 + i, -i\}$ غير مترافقين

$z^2 - 2zi + 3 = 0$

هذا هسه نكدر نحلل حسب الطريقة الثانية بس نضيف i^2

$z^2 - 2zi - 3i^2 = 0 \qquad (z - 3i)(z + i) = 0$

اما $z - 3i = 0 \quad z = 3i$ او $z + i = 0 \quad z = -i$

او عن طريق الدستور

$A = 1 \quad B = -2i \quad C = 3$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2i \pm \sqrt{4i^2 - 4.3}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$z = \frac{2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i$$

اما $z = i - 2i = -i$ او $z = i + 2i = 3i$

$$s = \{-i\,, 3i\}$$

إيجاد المعادلة التربيعية اذا علم جذراها

هنا بهذا الموضوع راح ينطيك الحل مالت المعادلة عبارة عن جذرين بشكل أعداد مركبة ويطلب المعادلة التربيعية الاصلية

الحل: -

- اجعل العددين بالصيغة العادية للعدد المركب يعني تخلص من الكسر ومن الاس إذا موجود.
- نجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهم

  مجموع الجذرين=m+L

  حاصل ضربهم =m. L

  ونطبق المعادلة هي

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0$$

- إذا ذكر بالسؤال وحدة من هاي العبارات (معاملاتها حقيقية) (الجذران مترافقان) (المعادلة معاملاتها تنتمي ل R). حتى لو اعطى جذر واحد فان الثاني هو مرافقه.

وجود الأصدقاء الحقيقيون، قراءة الكتب المفيدة، وجود إنسان لا مبالي، جميع هذه الأمور من مقومات الحياة المثالية.

صدقني، ليس هناك ألمٌ عظيم ولا ندم ولا ذكريات، كل شيء يُنسى حتى الحب العظيم. - ألبير كامو

{{{ لدينا الكثير من الأساتذة الذين يحتاجون الى مصحات عقلية ونفسية بسبب طرق تعليمهم المتشددة حيث انهم يحولون المدرسة الى ثكنة عسكرية, يحمل الطالب كل الأعباء في سبيل ان يصل اليها وهو مرتاح البال}}}

{{{ كم لدينا من مدرس محبوب ----القليل القليل. واعرف الكثير من الطلبة الذين عشقوا موادهم الدراسية بسبب ذلك المدرس}}} م.امجد

كتاب-امثلة -تمارين2-1:كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$

الحل

نبسط الجذرين قبل المباشرة بالحل.

$$l = -(2+2i) = -2-2i \qquad m = +(2+2i) = 2+2i$$

مجموع الجذرين

$$m + l = 2 + 2i + (-2-2i) = 2 + 2i - 2 - 2i = 0$$

حاصل ضرب الجذرين

$$m.l = (2+2i)(-2-2i) = -4 - 4i - 4i - 4i^2 = -4 - 8i + 4 = -8i$$

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0$$

$$x^2 - 8\text{i} = 0 \qquad x^2 - 0x + (-8\text{i}) = 0$$

كتاب-امثلة -تمارين2-1:كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقة واحد جذورها $3-4i$

الحل

بما ان المعاملات حقيقية اذن الجذران مترافقان

$$m = 3 - 4i \qquad l = 3 + 4i$$

مجموع الجذرين

$$m + l = 3 - 4i + 3 + 4i = 6$$

حاصل ضرب الجذرين

$$m.l = (3-4i)(3+4i) = 3^2 + 4^2 = 25$$

المعادلة هي

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

شوف المعاملات مالت المعادلة طلعن حقيقيات مابيهن i ولو طالعة i حلك خلط.

كتاب-امثلة -تمارين2-1:كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقة واحد جذورها $\frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

الحل

بما ان المعاملات حقيقية اذن الجذران مترافقان

$$m = \frac{\sqrt{2}+3i}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3i}{4} \qquad l = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3i}{4}$$

مجموع الجذرين

$$m + l = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3i}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3i}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حاصل ضرب الجذرين

$$m.l = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3i}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{3i}{4}\right)$$

كتاب-امثلة -تمارين2-1:كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقة واحد جذورها $5 - i$

الحل

بما ان المعاملات حقيقية اذن الجذران مترافقان

$$m = 5 - i \quad l = 5 + i$$

مجموع الجذرين

$$m + l = 5 - i + 5 + i = 10$$

حاصل ضرب الجذرين

$$m.l = (5 - i)(5 + i) = 5^2 + 1^2 = 26$$

المعادلة هي

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

كتاب-امثلة -تمارين2-1:كون المعادلة التربيعية التي جذراها $m = 1 + 2i \quad l = 1 - i$

الحل

مجموع الجذرين

$$m + l = 1 + 2i + 1 - i = 2 + i$$

حاصل ضرب الجذرين

$$m.l = (1 + 2i)(1 - i)$$

$$= 1 - i + 2i - 2i^2 = 1 + i + 2 = 3 + i$$

$$x^2 - (2 + i)x + 3 + i = 0 = 0$$

اذا كان مجموع الجذرين عبارة عن حدين من تكتب المعادلة لازم تخلي اقواس على مجموع الجذرين لان مضروبات بإشارة سالب ومضروبات بx

$$= \frac{2}{16} + \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

المعادلة هي

$$x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{11}{16} = 0$$

كتاب-امثلة -تمارين2-1:كون المعادلة التربيعية التي جذراها $l = (3 - 2i)^2 \qquad m = \frac{3-i}{1+i}$

الحل

نبسط الجذرين قبل المباشرة بالحل.

$$m = \frac{3 - i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i - i + i^2}{1 + 1}$$

$$= \frac{3 - 4i - 1}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$$l = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2$$

$$= 9 - 12i - 4 = 5 - 12i$$

هسه نبدي الحل مالتنا

مجموع الجذرين

$$m + l = 1 - 2i + 5 - 12i$$

$$= 6 - 14i$$

حاصل ضرب الجذرين

$$m.l = (1 - 2i)(5 - 12i)$$

$$= 5 - 12i - 10i + 24i^2$$

$$= 5 - 22i - 24 = -19 - 22i$$

$$x^2 - (6 - 14i)x - 19 - 22i = 0$$

كتاب-امثلة -تمارين2-1:كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية واحد جذورها $m = i$

الحل

بما ان المعاملات حقيقية اذن الجذران مترافقان

$$m = i \quad l = -i$$

مجموع الجذرين

$$m + l = i + (-i) = 0$$

حاصل ضرب الجذرين

$$m.l = i \times -i = -i^2 = 1$$

المعادلة هي

$$x^2 - 0x + 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

أراكَ هجرتني هجراً طويلاً
وما عوّدتني من قبلُ ذاكا
عهدتك لا تطيق الصبر عني
وتعصي في ودادي من نهاكا
فكيف تغيرت تلك السجايا
ومن هذا الذي عني ثناكـــا
فلا والله ما حاولت عذرا
فكل الناس تعذر ما خلاكـــا

بهاء الدين زهير.

توضيحات حول إيجاد قيم a ,b,c في المعادلة

- اذا المعادلة مو قياسية، سويها قياسية. بهيج صيغة $x^2 - (\text{مقدار})x \pm \text{مقدار} = 0$

بحيث اذا شفت اثنين x اخذ عامل مشترك وكذلك الإشارة لازم ترتبها ولازم تصفرها. بحيث تصير ضبط مثل القياسية.

- حدد قيم A,B,C مالات الدستور مع الإشارات.
- حدد الجذرين بالسؤال. واذا كال مترافقين او المعادلة معاملاتها حقيقية، او معاملاتها تنتمي لR او شفت المعادلة ما بيها i فمعناها الجذران m,lمترافقان.
- شوف اذا انطى $(b, c \in R)$ هنا عدنا شوية مشكلة. تشوف المعادلة اذا ما بيها (i) يعني الجذران مترافقان لكن اذا انطى $(b, c \in R)$ لكن المعادلة بيها (i) فهنا يعني ليسوا مترافقين فدير بالك.
- استخدم القانونين. اذا معلومة c استخدم قانونها أولا واذا B كذلك تبدي بيها أولا.

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = m.l = \frac{C}{A} \qquad \text{مجموع الجذرين} = m + l = -\frac{B}{A}$$

2011-د1-كتاب-امثلة-تمارين2-1:اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + 5 + 5i = 0$ جد قيمة $a \in C$ و ما هو الجذر الاخر ؟

الحل

$m = 3 + i \qquad A = 1 \quad B = -a \quad C = 5 + 5i$

دير بالك هنا L ما موجودة لان ما كايل المعاملات حقيقية ولا مترافقان ولا ينتمون للأعداد الحقيقية

:.من قانون الضرب.

$m.l = \frac{C}{A} \qquad (3+i).l = \frac{5+5i}{1}$

$(3+i).l = 5 + 5i$ من البعيد على القريب

$$l = \frac{5+5i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} = \frac{15 - 5i + 15i - 5i^2}{9+1} = \frac{15 + 10i + 5}{10} = \frac{20 + 10i}{10} = 2 + i$$

الجذر الاخر هو $= 2 + i$

ومن قانون المجموع نجد القيمة الثانية.

$m + l = \frac{-B}{A}$

$3 + i + 2 + i = \frac{-(-a)}{1} \qquad 5 + 2i = a$

لاحظ ان قيمة a طلعت تنتمي للاعداد المركبة مثل ما كال بالسؤال.

2015-د2:اذا كان $(2-4i)$ هو احد جذري المعادلة التربيعية $x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ معاملاتها حقيقية فجد قيم $(b, c \in R)$

الحل

لازم نجعل المعادلة قياسية بيها x واحدة. $2x^2 - (1+b)x + c - 6 = 0$

نجد قيم a ,b , c مالات الدستور $A = 2 \quad B = -(1+b) \quad C = c - 6$.

بما ان قيم المعاملات حقيقية (معطى في السؤال) $m = 2 - 4i \quad l = 2 + 4i$

ومن قانون المجموع

$m + l = \frac{-(B)}{A} \qquad 2 - 4i + 2 + 4i = \frac{-(-(1+b))}{2}$

$4 = \frac{1+b}{2}$ وسطين في طرفين

$1 + b = 8$ $\qquad$ $b = 8 - 1 = 7$

ومن قانون الضرب

$m.l = \frac{C}{A}$

$(2-4i).(2+4i) = \frac{c-6}{2}$ $\qquad$ $4 + 16 = \frac{c-6}{2}$ $\qquad$ $20 = \frac{c-6}{2}$

$40 = c - 6$ $\qquad$ $c = 40 + 6 = 46$

$c = 46$ $\qquad$ $b = 7$

2017-د2-خارج العراق:- اذا كان $(1+2i)$ هو احد جذري المعادلة التربيعية $x^2 - (3-i)x + a = 0$ فما قيمة الجذر الاخر وقيمة a؟

الحل

$A = 1 \quad B = -(3-i) \quad C = a \qquad m = 1 + 2i$

دير بالك هنا L ما موجودة لان ما كايل المعاملات حقيقية ولا مترافقان ولا ينتمون للأعداد الحقيقية

من قانون مجموع الجذرين

$m + l = \frac{-B}{A}$ $\qquad$ $1 + 2i + l = \frac{3-i}{1}$ $\qquad$ $1 + 2i + l = 3 - i$

$l = 3 - i - 1 - 2i = 2 - 3i$

الجذر الاخر هو $= 2 - 3i$

ومن قانون الضرب نجد القيمة الثانية.

$m.l = \frac{c}{A}$ $\qquad$ $(1+2i)(2-3i) = \frac{a}{1}$

$a = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 2 + 6 + i = 8 + i$ $\qquad$ $a = 8 + i$

قال الصبي للحمار: (يا غبي).

قال الحمار للصبي: (يا عربي) !

اثرائي :-اذا كانت المعادلة الاتية $x^2 - 3x + (k - 4i) = -3xi$ جذرها الاول ضعف الثاني فما قيمة k ؟

الحل

لازم نجعل المعادلة قياسية بيها x واحدة ولازم نصفرها. $x^2 - 3x + 3xi + k - 4i = 0$

$x^2 - (3 - 3i)x + k - 4i = 0$

نجد قيم a ,b , c مالات الدستور $A = 1 \quad B = -(3 - 3i) \quad C = k - 4i$.

الجذر الأول =ضعف الثاني. بهيج عبارات دائما افرض أولا الأقل .وهنا بهذا السؤال هو الجذر الثاني=n اذن الجذر الأول يكون =$2n$

ومن قانون المجموع

$m + l = \frac{-(B)}{A}$ $\quad 2n + n = \frac{3-3i}{1}$ $\quad 3n = 3 - 3i$

$n = 1 - i$

ومن قانون الضرب

$m.l = \frac{C}{A}$

$2n.n = \frac{k-4i}{1}$ $\quad 2n^2 = k - 4i$ $\quad 2(1 - i)^2 = k - 4i$

$2(1 - 2i + i^2) = k - 4i$ $\quad 2(1 - 2i - 1) = k - 4i$

$-4i = k - 4i$ $\quad k = 0$

كل انسان أصادفه لا بد أن يفوقني من ناحية أو أخرى ولذلك أحاول أن أتعلم منه

اميرسون

الهدف النهائي للحياة هو الفعل وليس العلم، فالعلم بلا عمل لا يساوي شيئاً. نحن نتعلم لكي نعمل. الدوس هيكسلي

عجبتُ منك ومنّـي   يا مُنْيـةَ المُتـمَنّـي

أدنيتـني منك حتّـى   ظننتُ أنـك أنـّـي   الحلاج

التمثيل الهندسي للعدد المركب (ارجاند)

- يمكن تمثيل اي عدد مركب $z = x + yi$ بصورة هندسية على الاحداثيات الديكارتية بتحويله الى الصيغة الديكارتية أولا (x, y)
- يمثل الجزء الحقيقي على محور السينات الموجب او السالب (يمين او يسار) حسب اشارة الرقم.
- يمثل الجزء التخيلي على محور الصادات الموجب او السالب (صعودا او نزولا) حسبا اشارة العدد.

وندرس ثلاثة حالات للرسم هي

رسم عدد(Z)

ونظيره الجمعي(Z-)

او مرافقه $(\bar{Z})$

نحول العدد الى صيغة ديكارتية

(x , y)

ثم نحدد موقع النقطة ونوصلها بسهم مع نقطة الأصل.

حالة الجمع

$$Z_1 + Z_2 = Z_3$$

نجد من عملية الجمع

$$z_1 \xrightarrow{yields} p(z_1)$$

$$z_2 \xrightarrow{yields} p(z_2)$$

$$z_3 \xrightarrow{yields} p(z_3)$$

بعدين نحدد النقاط على الاحداثيات ونوصل بين $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_2p_3}$

فيتكون مضلع رباعي

حالة الطرح

$$Z_1 - Z_2 = Z_3$$

نجد من عملية الطرح

$$z_1 \xrightarrow{yields} p(z_1)$$

لازم تدخل الإشارة على العدد الثاني

$$-z_2 \xrightarrow{yields} p(-z_2)$$

$$z_3 \xrightarrow{yields} p(z_3)$$

بعدين نحدد النقاط على الاحداثيات ونوصل بين $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_2p_3}$.

زارَ الرئيسُ المؤتمنْ---بعض ولايات الوطنْ---وحين زار حيِّنا---قال لنا: هاتوا شكاواكم بصدقٍ في العلنْ

ولا تخافوا أحداً.. فقد مضى ذاكَ الزمنْ فقال صاحبي "حسنْ": يا سيِّدي

أين الرغيفُ واللبنْ؟ وأين تأمينُ السكنْ؟ وأين توفيرُ المهَنْ؟ وأينَ منْ

يُوفِّرُ الدَّواءَ للفقيرِ دونما ثمنْ؟ يا سيِّدي لم نرَ من ذلك شيئاً أبداً. قال الرئيسُ في حزنْ: أحرَقَ ربي جسدي

أَكُلُّ هذا حاصلٌ في بَلَدي؟!! شكراً على صِدْقكَ في تنبيهنا يا ولدي سوف ترى الخيرَ غداً.

***

وبعدَ عامٍ زارنا. ومرةً ثانيةً قال لنا: هاتوا شكاواكم بصدقٍ في العلنْ. ولا تخافوا أحداً فقد مضى ذاك الزمنْ. لم يشتكِ الناسُ! فقمتُ معلناً: أين الرغيفُ واللبنْ؟ وأين تأمينُ السكنْ؟ وأين توفيرُ المهَنْ؟

وأينَ منْ يُوفِّرُ الدَّواءَ للفقيرِ دونما ثمنْ؟ معذرةً سيِّدي.. وأين صاحبي "حسنْ"؟! احمد مطر

مثال 22-كتاب: - مثل العمليات الهندسية التالية بشكل ارجاند

$1)(3+4i)+(5+2i) \qquad 2)(6-2i)-(2-5i)$

حالة الجمع

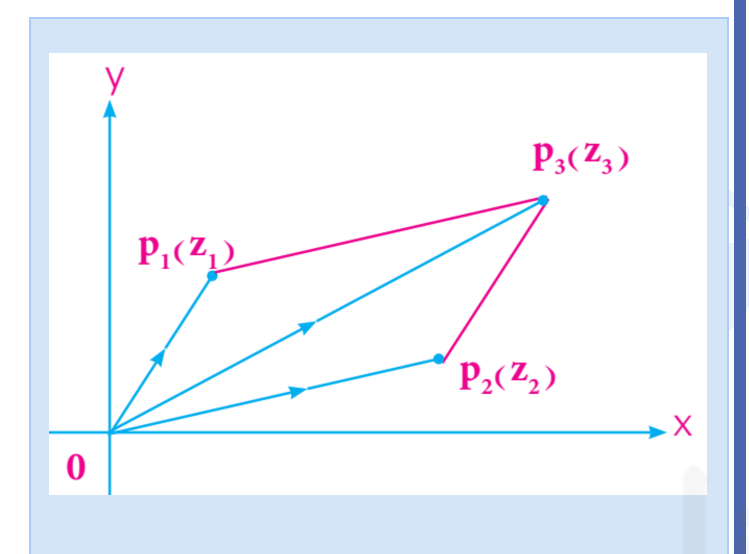
من كل عدد نطلع نقطة

$Z_1 = 3+4i \xrightarrow{yields} p(z_1) = (3,4)$

$Z_2 = 5+2i \xrightarrow{yields} p(z_2) = (5,2)$

$Z_1 + Z_2 = 3+4i+5+2i = 8+6i$

$z_3 = 8+6i \xrightarrow{yields} p(z_3) = (8,6)$



حالة الطرح

$Z_1 = 6-2i \xrightarrow{yields} p(z_1) = (6,-2)$

بس بحالة الطرح لازم ندخل الإشارة على العدد الثاني وبعدين نطلع نقطة رقم 2

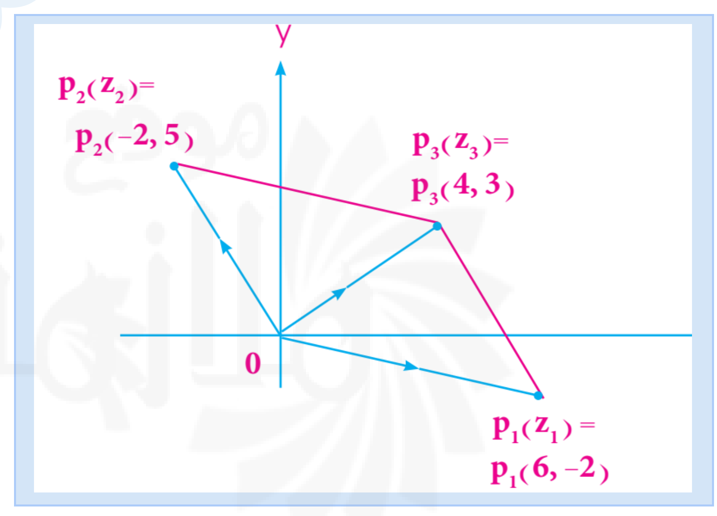
$-Z_2 = -2+5i \xrightarrow{yields} p(z_2) = (-2,5)$

هسه نرجع من جديد ونطرح الأرقام ونجد ناتج النقطة الثالثة

$Z_1 + Z_2 = (6-2i)-(2-5i)$

$= 6-2i-2+5i = 4+3i$

$z_3 = 4+3i \xrightarrow{yields} p(z_3) = (4,3)$



هل اتاك القلب قد نال الرحيل
كان يقضي الوقت حزنا والدموع
اين انت الليل مرعب والظلام
يا مسافر قل فؤادي هل اتاك

ويه اخر ضحكه شد حيله واجاك
من مشيت بسرعه طلعهن وراك
فدوه متشوف الكلب بلكت لكاك
دوره زين ايجوز متغطي بغطاك

تمارين3-1: - اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد التالية ومثلها مع نظائرها بشكل ارجاند

$z = 2 + 3i$ $\quad z = -1 + 3i$ $\quad z = 1 - i$ $\quad z = i$

هنا مطلوب الحالة الأولى العدد والنظير الجمعي الي يغير إشارة كل العدد وحيل بسيط

وخلها قاعدة ببالك دائما العدد ونظيره الجمعي الرسم مالتهم متعاكس ب 180درجة

العدد	نظيره الجمعي	شكل ارجاند
$Z_1 = 2 + 3i$ $p(z_1) = (2,3)$	$-Z_1 = -2 - 3i$ $p(-z_1) = (-3,-4)$	y, x, P_1, $P(-z_1)$
$Z_2 = -1 + 3i$ $p(z_2) = (-1,3)$	$-Z_2 = 1 - 3i$ $p(-z_1) = (1,-3)$	y, x, P_2, $P(-z_2)$
$Z_3 = 1 - i$ $p(z_3) = (1,-1)$	$-Z_3 = -1 + i$ $p(-z_3) = (-1,1)$	x, $P(-z_3)$, $P(z_3)$
$Z_4 = 0 + i$ $p(z_4) = (0,1)$	$-Z_4 = 0 - i$ $p(-z_4) = (0,-1)$	x, $P(z_4)$, $P(-z_4)$

المقياس والسعة الأساسية والصيغة القطبية للعدد المركب

الصيغة القطبية هي تحويل العدد من صيغة جبرية (z=x +yi) الى صيغة بدلالة $\sin\theta . \cos\theta$. ونتبع الخطوات:

- ❖ لازم العدد بالصيغة العادية. وإذا كسر او مرفوع لاس وكذا، لازم يتبسط يالله بعدين نبدأ بالخطوات مالتنا.
- ❖ عدنا لو العدد بصيغته العادية كاملا لو مكون من جزء واحد (حقيقي او تخيلي).
- ❖ اذا كان العدد كاملا z=x +yi.

حتى نوجد الصيغة القطبية امامنا خطوتين نجد منها مجموعة من المطاليب ثم في النهاية نكتب الصيغة القطبية

الخطوة الأولى

➢ المقياس: - وهو عدد حقيقي موجب يمثل طول العدد المركب ونرمز له بالرمز

$$\left(mod(Z) = \|z\| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

الخطوة الثانية

وتمر بعدة مراحل الى ان نصل لها وهي السعة الأساسية

نجد زاوية الاسناد حسب القوانين التالية: -

$$\text{زاوية الاسناد} = \vartheta = \begin{cases} cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

ثم نحدد الزاوية من خلال قيم $sin\theta$ او $cos\theta$ للزاوية الخاصة المعروفة.

او بطريقة مختصرة ومضبوطة شلون؟ اذا $\sqrt{3}$ موجود بالجزء التخيلي فان الزاوية هي $\left[\theta = 60 = \frac{\pi}{3}\right]$ واذا موجود بالجزء الحقيقي فان الزاوية $\left[\theta = 30 = \frac{\pi}{6}\right]$ واذا العدد لا يحتوي على $\sqrt{3}$ فان زاويته $\left[\theta = 45 = \frac{\pi}{4}\right]$

$\theta = 60 = \frac{\pi}{3}$	$\theta = 30 = \frac{\pi}{6}$	$\theta = 45 = \frac{\pi}{4}$
$a + a\sqrt{3}i$	$a\sqrt{3} + ai$	$a + ai$

ثم ننتقل الى مرحلة تحديد موقع العدد حتى نعرف قانون السعة الأساسية للعدد حسب الربع. لاحظ المخطط الاسفل

السعة الاساسية(Arg(Z)):- هي الزاوية المحصورة بين محور السينات الموجب دائما وبين العدد حسب موقعه والدوران عكس عقارب الساعة دائما. ولها أربع حالات حسب الارباع وموضحة بالمخطط.

الربع الاول يكون العدد فيه بشكل

$z = +x + y\,i$

$(+,+) \rightarrow (+cos\theta, +sin\theta)$

السعة الاساسية $= Arg(z) = \theta$

ولاحظ اشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي موجب

الربع الثاني يكون العدد فيه بشكل

$z = -x + y\,i$

$(-,+) \rightarrow (-cos\theta, +sin\theta)$

السعة الاساسية $= Arg(z) = \pi - \theta$

ولاحظ اشارة الحقيقي سالب والتخيلي موجب

الربع الثالث يكون العدد فيه بشكل

$z = -x - y\,i$

$(-,-) \rightarrow (-cos\theta, -sin\theta)$

السعة الاساسية $= Arg(z) = \pi + \theta$

ولاحظ اشارة الحقيقي والتخيلي موجب

الربع الرابع يكون العدد فيه بشكل

$z = +x - y\,i$

$(+,-) \rightarrow (+cos\theta, -sin\theta)$

السعة الاساسية $= Arg(z) = 2\pi - \theta$

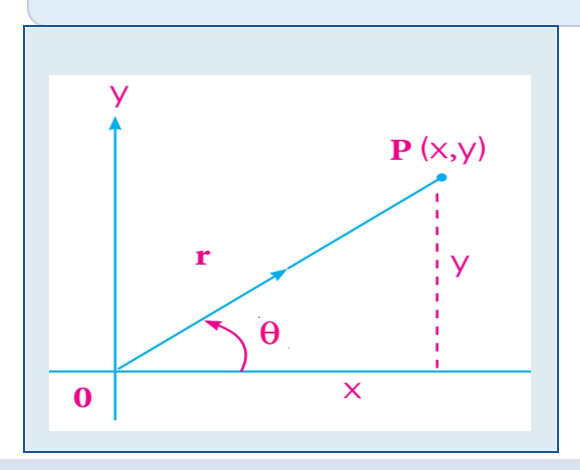
ولاحظ اشارة الحقيقي موجب والتخيلي سالب

النتيجة النهائية نكتب قانون الصيغة القطبية حسب التالي ونعوض $r, Arg(z)$

$$Z = \|Z\|[cos(ArgZ) + i\,sin(ArgZ)] = r[cos\theta + i\,sin\theta]$$

وإذا طلب السعة وتمثل السعة الأساسية للعدد مضاف لها عدد صحيح من الدورات

السعة$=Arg\,Z + 2n\pi$ $\qquad n \in Z$



2006-د1: -جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد المركب $1+\sqrt{3}i$

$z = 1+\sqrt{3}i$

$(1,\sqrt{3})$ $x = 1$ $y = \sqrt{3}$ $(+,+)$

ربع اول

نطبق خطوات الصيغة القطبية.

$1)$المقياس $= mod\, Z = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3}$

$= \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد $\theta = \frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الاول

$2) Arg\,(z) = \theta = \frac{\pi}{3}$

نكتب الصيغة القطبية ونعوض. طبعا هنا ما مطلوبة بالسؤال بس هيج حتى نتعلم .بالامتحان تكتب فقط المطلوب منك

$z = r(cos\theta + i\, sin\theta)$

$= 2\,(cos\frac{\pi}{3} + i\, sin\, \frac{\pi}{3})$

2002-د1: -جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد المركب $(-\sqrt{3},1)$

$z = -\sqrt{3}+i$ $(-\sqrt{3},1)$

$x = -\sqrt{3}$ $y = 1$ $(-,+)$

ربع ثاني

نطبق خطوات الصيغة القطبية.

$1)$المقياس $= mod\, Z = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1}$

$= \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$

زاوية الاسناد $\theta = \frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الثاني

$2) Arg\,(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

نكتب الصيغة القطبية ونعوض. طبعا هنا ما مطلوبة بالسؤال بس هيج حتى نتعلم. بالامتحان تكتب فقط المطلوب منك.

$z = r(cos\theta + i\, sin\theta)$

$= 2\,(cos\frac{5\pi}{6} + i\, sin\, \frac{5\pi}{6})$

2001-د1: -جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد المركب $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$

نجعل العدد بالصيغة العادية

$$z=\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}\times\frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{7-14\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-2.3i^2}{1+4.3}$$

$$=\frac{7-13\sqrt{3}i+6}{13}=\frac{13-13\sqrt{3}i}{13}$$

$$=\frac{13}{13}-\frac{13\sqrt{3}i}{13}=1-\sqrt{3}i$$

$z=1-\sqrt{3}i$ $\quad (1,-\sqrt{3})\ \ (+,-)$

ربع رابع

$1)$ المقياس $=mod\,Z=r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$=\sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{3}$

تقع في الربع الرابع

$$2)Arg\,(z)=2\pi-\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{6\pi-\pi}{3}$$

$$=\frac{5\pi}{3}$$

2007-د2: -جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

نجعل العدد بالصيغة العادية

$$z=\frac{2i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i-2.i^2}{1+1}$$

$$=\frac{2i+2}{2}=\frac{2+2i}{2}$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{2i}{2}=1+i$$

هسه نطبق خطوات الصيغة القطبية.

$Z=1+i$ $\quad (1,1)\ \ (+,+)$

$1)$ المقياس $=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}$

$$=\sqrt{2}$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الاول

السعة الاساسية $=Arg\,(z)=\theta=\frac{\pi}{4}$

عذِّبْ بما شئتَ غيرَ البعدِ عنكَ تجدْ

أوفى مُحِبٍ، بما يُرْضيكَ مُبْتَهِجِ

وخذْ بقيَّةَ ما أبقيتَ منْ رمقٍ

لا خيرَ في الحبِّ إنْ أبقى على المهجِ

ابن الفارض

2008-د1: -جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}i)^2$

بالبداية لازم نبسط العدد نسوي صيغة عادية يالله عود بعدين نكدر نحل صيغة قطبية. هسه نفتح مربع حدانية

$$z=(1+\sqrt{3}i)^2=1+2\sqrt{3}i+3i^2$$
$$=1+2\sqrt{3}i-3$$
$$=-2+2\sqrt{3}i$$

هسه نطبق خطوات الصيغة القطبية.

$Z=-2+2\sqrt{3}i$ $\quad (-2,2\sqrt{3}) \quad (-,+)$

ربع ثاني

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{4+4.3}=\sqrt{16}=4$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\theta=\frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الثاني

$$Arg\,(z)=\pi-\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{6\pi-\pi}{3}$$
$$=\frac{5\pi}{3}$$

2008-د2: -جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$

نجعل العدد بالصيغة العادية

$$z=\frac{4}{1-\sqrt{3}i}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{4+4\sqrt{3}i}{1+3}=\frac{4}{4}+\frac{4\sqrt{3}i}{4}=1+\sqrt{3}i$$

$(1,\sqrt{3}) \quad x=1 \quad y=\sqrt{3} \quad (+,+)$

ربع اول

نطبق خطوات الصيغة القطبية.

$$1)\text{المقياس}=mod\,Z=r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}$$
$$=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$$

$$sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الاول

$$2)Arg\,(z)=\theta=\frac{\pi}{3}$$

نكتب الصيغة القطبية ونعوض.

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$$
$$=2\,(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\,\frac{\pi}{3})$$

2016-تمهيدي: -جد الصيغة القطبية للعدد المركب
$z = \frac{4-2i}{3+i}$

هنا لازم نبسط العدد ونسويه صيغة عادية يالله بعدين نسوي خطوات الصيغة القطبية.

$$z = \frac{4-2i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} = \frac{12-4i-6i+2i^2}{9+1}$$
$$= \frac{12-2-10i}{10} = \frac{10}{10} - \frac{10i}{10}$$
$$= 1 - i$$

هسه نطبق خطوات الصيغة القطبية. هسه نطبق خطوات الصيغة القطبية.

$Z = 1 - i \qquad (1, -1) \quad (+, -)$

$1)$ المقياس $= r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2}$
$= \sqrt{2}$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد وتقع في الربع الرابع $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$Arg\ (z) = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4}$$
$$= \frac{7\pi}{4}$$

$$z = 2\ (cos\frac{7\pi}{4} + i\ sin\ \frac{7\pi}{4})$$

2012-د1: اكتب الصيغة القطبية للعدد للعدد المركب $z = 2\sqrt{3} - 2i$

$z = 2\sqrt{3} - 2i \qquad (2\sqrt{3}, -2)$

$x = 2\sqrt{3} \qquad y = 2 \qquad (+, -)$

ربع رابع

نطبق خطوات الصيغة القطبية.

$1)$ المقياس $= mod\ Z = r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12+4}$$
$$= \sqrt{16} = 4$$

$$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

زاوية الاسناد $\theta = \frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الرابع

$$2) Arg\ (z) = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta\ )$$
$$= 2\ (cos\frac{11\pi}{6} + i\ sin\ \frac{11\pi}{6})$$

النوع الثاني من الصيغة القطبية

عندما يكون العدد مكون من جزء واحد لو حقيقي لو تخيلي فقط . نتبع اربعة قوانين سريعة كلش هي :-

$$z = a = a \times 1 = a(cos0 + isin0) \qquad z = -a = a \times -1 = a(cos\pi + isin\pi)$$

$$z = ai = a \times i = a\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right) \qquad z = -ai = a \times -i = a(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2})$$

يعني تسحب العدد الموجب والباقي راح يكون لو $(1 . -1 . i . -i)$ هذن تستخدم وياهم القوانين مالتهم اعلاه

جد الصيغة القطبية للاعداد التالية :- $5 . -7 \; .4i \; . -2i$

الحل:-

$5 = 5 \times 1 = 5(cos0 + isin0)$ $\qquad r = 5 \qquad \theta = 0$

$-7 = 7 \times -1 = 7(cos\pi + isin\pi)$ $\qquad r = 7 \qquad \theta = \pi$

$4i = 4 \times i = 4\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad r = 4 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$

$-2i = 2 \times -i = 2\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)$ $\qquad r = 2 \qquad \theta = \frac{3\pi}{2}$

النوع	بالقطري	بالستيني	Cos	Sin
محوريات	$0, 2\pi$	$0, 360$	1	0
	π	180	-1	0
	$\frac{\pi}{2}$	90	0	1
	$\frac{3\pi}{2}$	270	0	-1
خاصة	$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
	$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

مبرهنة ديموافر

A. مبرهنة تستخدم لتبسيط الاعداد المركبة المرفوعة لاس كبير. لكن بشرط ان نحول العدد الى الصيغة القطبية.

B. اذا العدد بيه w او كسر ما تشتغل المبرهنة الا تحول العدد الى صيغة عادية وبعدين تحوله الى صيغة قطبية.

الخلاصة ديموافر ما يشتغل الا صيغة قطبية.

والصيغة هي: -

$$z^n = r^n[cos\theta + isin\,\theta]^n$$

$$z^n = r^n[cos\;\;n\theta + isin\;\;n\theta]$$

C- اذا الاس سالب نغير اشارة الوسط. حسب القاعدة

$$cos - n\theta = +cosn\theta \qquad\qquad sin - n\theta = -sin\,n\theta$$

=======

خطوات مبرهنة ديمو افر

- حول العدد صيغة قطبية.
- نزل الاس على العدد حسب قاعدة المبرهنة.
- أتأكد اكو اختصار بين الاس ومقام الزاوية بعد تنزيله.

تبسيط r المقياس عندما يرفع لاس

✓ اذا كان $(r = \sqrt{2})$ مرفوع لاس

$$(\sqrt{2})^n = \begin{cases} n = \text{فردي} = (\sqrt{2})^{n-1}\sqrt{2} = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2} \\ n = \text{زوجي} = 2^{\frac{n}{2}} \end{cases}$$

✓ اذا كان المقياس بالاس سالب للمقام واذا كان المقياس مقدارين نوزع الاس ثم يحل كل مقدار لوحده

$$r^{-n} = \frac{1}{r^n} \qquad\qquad (a\sqrt{2})^n = a^n.(\sqrt{2})^n$$

خلاصة الزاوية في ديموافر

اذا كان المقام للزاوية =3,4,6		اذا كان المقام للزاوية =2 او بدون مقام	
الزاوية اقل من 360	الزاوية اكبر من 360	زاوية محورية	مضاعفات $n\pi$
اذا كان البسط اقل من ضعف المقام فهذا يعني ان الزاوية اقل من 360 درجة. الحل حسب المثال لو كانت الزاوية مثلا $\frac{5\pi}{4}$ نهمل البسط ونأخذ الزاوية $\frac{\pi}{4}$ ونجد قيمة $cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ثم نرجع من جديد للبسط شنسوي؟نضرب $\left[5.\frac{\pi}{4}=5.45=225\right]$ يعني ربع ثالث ناخذ إشارة Cos ,sin=(-,-) مالت الربع الثالث ونضعها على الناتج وينتهي الحل. الحل النهائي هو $=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$	اذا كان البسط اكبر من ضعف المقام يعني الزاوية اكبر من 360 درجة. الحل: - نقسم البسط على ضعف المقام ونأخذ الباقي فقط مثال $\frac{44\pi}{3}$ نقسم 44 على ضعف المقام 6 ويبقى الباقي =2 نجد زاوية جديدة هي $\frac{2\pi}{3}$ هسه هاي الزاوية نشتغل عليها مثل الحالة الأولى	اذا نزلنا الاس واختصرنا وصارت الزاوية $\pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ هاي مباشرة من الجدول نطلع قيم cos,sin لها. وإذا صارت $\frac{n\pi}{2}$ بحيث n اكبر من 3 نقسمها على ضعف المقام همينا ونأخذ الباقي مكان n وتصبح محورية أيضا. مثال $\frac{15\pi}{2}$ نقسم 15 على ضعف المقام =4 راح يبقى الباقي 3 وتصبح الزاوية محورية هي $\frac{3\pi}{2}$	اذا كان n رقم فردي اعتبر الزاوية π واذا الرقم n زوجي اعتبر الزاوية =صفر وروح من الجدول طلع قيم Cos ,sin لهما . مثال 22π نعتبرها =صفر وهكذا لو كانت 19π نعتبرها =π

الحالة الأولى: - لما تكون الصيغة القطبية جاهزة

2012-تمهيدي-2017-د2-امثلة كتاب-تمارين4-1-اثرائي: -احسب ما يلي

$1)\left(cos\frac{5}{24}\pi+isin\frac{5}{24}\ \pi\right)^{4}$ $\quad$ $2)\left(cos\frac{3\pi}{8}+isin\frac{3\pi}{8}\right)^{-4}$

$3)\left(cos\frac{7}{12}\pi+isin\frac{7}{12}\ \pi\right)^{-3}$ $\quad$ $4)\left(sin\frac{\pi}{3}-icos\frac{\pi}{3}\right)^{45}$

تبسيط الزاوية	الحل
البسط اقل من ضعف المقام اذن الحل: $cos\ \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad sin\ \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ثم نحدد إشارات الربع $\frac{5\pi}{6}=5.30=150$ $(-,+)$ ربع ثاني	$1)\left(cos\frac{5}{24}\pi+isin\frac{5}{24}\ \pi\right)^{4}$ $=\left(cos4\ \frac{5}{24}\ \pi+isin\ 4.\frac{5}{24}\ \pi\right)$ $=cos\ \frac{5\pi}{6}\ +isin\ \frac{5\pi}{6}$ $=\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
المقام=2 اذن الزاوية محورية مباشرة من جدول الزوايا قيم $cos\ \frac{3\pi}{2}=0\ ,$ $sin\ \frac{3\pi}{2}=-1$ $\frac{3\pi}{2}=270$	$\left(cos\frac{3}{8}\pi+isin\frac{3}{8}\ \pi\right)^{-4}$ $=\left(cos-\ 4.\frac{3\pi}{8}\ +isin-\ 4.\frac{3\pi}{8}\right)$ الاختصار $=cos\ \frac{3\pi}{2}\ -isin\ \frac{3\pi}{2}$ $=0-1i$ $=0-i$

البسط اقل من ضعف المقام اذن

الحل:

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ثم نحدد إشارات الربع

$\frac{7\pi}{4}=7.45=315$

$(+,-)$ ربع رابع

$$3)\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)^{-3}$$

$$=\left(\cos-\ 3.\frac{7}{12}\pi+i\sin-\ 3.\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$=\left(\cos\frac{7\pi}{4}\pi-i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$=+\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

اذا (i) موجودة قرب cos وليس sin نضرب sin ب$(-i^2)$ ثم ناخذ عامل مشترك (i) بحيث تتحول الى صيغة قطبية جاهزة ثم نوع الاس ونطبق مبرهنة ديموافر.

بعد انزال الاس لاحظ الزاوية صارت مضاعفات π ومضروبة برقم فردي اذن نعتبر الزاوية π

$$4)\left(\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}\right)^{45}$$

$$=\left[-i^2\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}\right]^{45}$$

$$=\left[-i\left(i\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)\right]^{45}$$

$$=[-i]^{45}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{45}$$

$$=-(i^4)^{11}\,i\left(\cos45\frac{\pi}{3}+i\sin45\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-i\left(\cos15\pi+i\sin15\pi\right)$$

$$=-i\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

$$=-i\left(-1+0i\right)$$

$$=i$$

لقدْ صارَ قلبي قابلاً كلَّ صورةٍ فمَرْعًى لغِزْلاَنٍ وديرٌ لرُهْبانِ

وبَيْتٌ لأوثانٍ وكعبةُ طائفٍ وألواحُ توراةٍ ومصحفُ قرآنِ

أدينُ بدينِ الحبِّ أنَّى توجَّهتْ رَكائِبُهُ فالحُبُّ ديني وإيماني

ابن عربي

الحالة الثانية: -العدد بالصيغة العادية ومرفوع لاس لازم نحوله الى الصيغة القطبية أولا

مثال –وزاري2011-د2: -احسب باستخدام ديموافر $(1+i)^{11}$

الحل :-نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته

التحويل للصيغة القطبية

$Z=1+i \qquad x=1 \qquad y=1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الأول $Arg(z)=\theta=\frac{\pi}{4}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad =\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

راح نطبق ديموافر بأنزال الاس.

إنزال الاس حسب ديموافر

$z^{11}=(\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}$

$z^{11}=(\sqrt{2})^{10}\sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4})$

فاصل للتوضيح: - البسط =11 اكبر من ضعف المقام=8 يعني الزاوية عابرة 360درجة . لذلك نقسم 11تقسيم 8 ويبقى 3. المهم هو الباقي مالت القسمة الي هو 3 .نحذف ال11 ونخلي مكانها 3 ونواصل الحل.

بعدين :- نجد $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$ ثم نضرب $(3\times 45=135)$يعني الربع الثاني$(-,+)$.

إيجاد قيمة sin,cos وتحديد الربع

نواصل من جديد $z^{11}=(2)^{\frac{10}{2}}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$z^{11}=32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=-32\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}+32\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$=-32+32\,i$

2018-تمهيدي: -احسب باستخدام التعميم (ديموافر) $(\sqrt{3}-i)^{-5}$

الحل: -نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته

$Z=\sqrt{3}-i \qquad x=\sqrt{3} \qquad y=-1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{2}$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الرابع $Arg(z)=2\pi-\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad =2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$

التحويل للصيغة القطبية

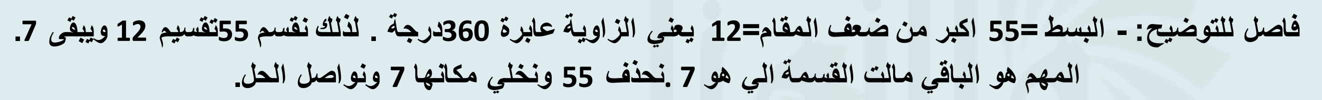
راح نطبق ديموافر بأنزال الاس.

$z^{-5}=(2)^{-5}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^{-5}$

$z^{-5}=\frac{1}{2^5}\left(\cos-5\frac{11\pi}{6}+i\sin-5\frac{11\pi}{6}\right)$

$z^{-5}=\frac{1}{32}(\cos\frac{55\pi}{6}-i\sin\frac{55\pi}{6})$

انزال الاس حسب ديموافر

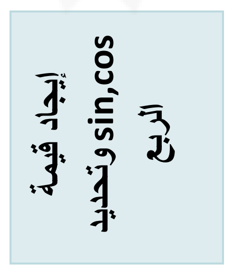

فاصل للتوضيح: - البسط =55 اكبر من ضعف المقام=12 يعني الزاوية عابرة 360درجة . لذلك نقسم 55تقسيم 12 ويبقى 7.
المهم هو الباقي مالت القسمة الي هو 7 .نحذف 55 ونخلي مكانها 7 ونواصل الحل.

بعدين :- نجد $\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}$ ثم نضرب $(7.30=210)$يعني الربع الثالث$(-,-)$.

نواصل من جديد $z^{-5}=\frac{1}{32}(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6})$

$z^{-5}=\frac{1}{32}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{1}{2})i)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{64}+\frac{1}{64}i$



2018-تمهيدي: -احسب باستخدام (ديموافر) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-9}$

الحل: -نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته

$Z=\sqrt{3}+i \qquad x=\sqrt{3} \qquad y=1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الاول $Arg\,(z)=\theta=\frac{\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad =2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

التحويل للصيغة القطبية

راح نطبق ديموافر بأنزال الاس.

$z^{-9}=(2)^{-9}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-9}$

$=\frac{1}{2^5}\left(\cos-9\frac{\pi}{6}+i\sin-9\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

انزال الاس حسب ديموافر

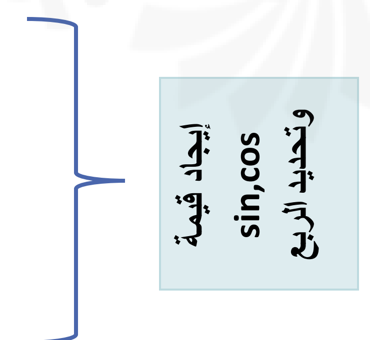
فاصل للتوضيح: - الزاوية محورية مباشرة من الجدول

$\cos 270=0 \qquad \sin 270=-1$

نواصل من جديد $z^{-9}=\frac{1}{512}(0-(-1)i)$

$=\frac{1}{512}(0+i)$

$=+\frac{i}{512}$



إيجاد قيمة sin,cos وتحديد الربع

مثال –وزاري2011-د2: -احسب باستخدام ديموافر $(1-i)^7$

الحل :-نترك الاس ونأخذ بس الرقم ونطلع الصيغة القطبية مالته

$Z=1-i \qquad x=1 \qquad y=-1$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

زاوية الاسناد $\theta=\frac{\pi}{4}$

وتقع في الربع الأول $Arg(z)=2\pi-\theta=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi-\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

التحويل للصيغة القطبية

راح نطبق ديموافر بأنزال الاس.

$$z^7=(\sqrt{2})^7\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{11}$$

$$=(\sqrt{2})^6\sqrt{2}\left(\cos\frac{49\pi}{4}+i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$$

إنزال الاس حسب ديموافر

فاصل للتوضيح: - البسط=49اكبر من ضعف المقام=8 يعني الزاوية عابرة 360درجة . لذلك نقسم 49 تقسيم 8 ويبقى 1. المهم هو الباقي مالت القسمة الي هو 1 .نحذف 49 ونخلي مكانها 1ونواصل الحل.

بعدين :- نجد $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$ ثم نضرب $(1\times 45=45)$يعني الربع الأول $(+,+)$.

نواصل من جديد $z^7=(2)^{\frac{6}{2}}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=8\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}+8\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$=8+8i$$

إيجاد قيمة sin,cos وتحديد الربع

ضرب او قسمة عددين قطبيا حسب مبرهنة ديموافر

لضرب او قسمة عددين او أكثر وهم بحالة صيغة قطبية.

- اذا العددين ما متساوين بأرقام الزوايا(معامل الزاوية) نصعد الارقام ونضربها بالاس.
- اذا ما متساوين بإشارة الوسط. نصعد السالب الى الاس ونضربه. بحيث يتشابهون بالأرقام وبالإشارة مالت الوسط .
- اذا ضرب نطبق عند الضرب تجمع الاسس.
- وإذا قسمة نختصر اذا الأسس متشابهات بالإشارة واذا مختلفات نصعد المقام ونجمع الاسس.
- اذا بقى اس بعد الاختصار ينزل على الزاوية وينضرب بيها.

2013-د2: -بسط مایاتي

$$\frac{(cos5\theta + isin5\theta)^2}{(cos3\theta + isin3\theta)^3}$$

الزوايا غير متشابهة نصعد الارقام ونضربها بالاسم ثم نختصر لان الاشارات متساوية.

$$\frac{(cos5\theta + isin5\theta)^2}{(cos3\theta + isin3\theta)^3} = \frac{(cos\theta + isin\theta)^{2\times5}}{(cos\theta + isin\theta)^{3\times3}} = \frac{(cos\theta + isin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^9} = cos\theta + i\,sin\theta$$

2016-د2-خارج العراق: -اثبت

$$\frac{(cos2\theta + isin2\theta)^5}{(cos4\theta + isin4\theta)^2} - (cos\theta + isin\theta)^2 = 0$$

نصعد المعاملات ونضربها بالاس ونختصر القسمة. والقوس الثاني نصعد السالب والمعامل: -

$$lHS = \left[\frac{(cos\theta + isin\theta)^{2\times5}}{(cos\theta + isin\theta)^{4\times2}}\right] - (cos\theta + isin\theta)^2$$

$$= \left[\frac{(cos\theta + isin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^8}\right] - (cos\theta + isin\theta)^2$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^2 - (cos\theta + isin\theta)^2$$

المقدارين متشابهين ومختلفين بالإشارة يطرحان

$$= (cos\theta + isin\theta)^2 - (cos\theta + isin\theta)^2$$

$$= 0$$

2017 د1\اثبت ان

$$\left[\frac{(cos3\theta + isin3\theta)^4}{(cos5\theta + isin5\theta)^2}\right](cos2\theta - isin2\theta) = 1$$

نصعد المعاملات ونضربها بالاس ونختصر القسمة. والقوس الثاني نصعد السالب والمعامل :-

$$lHS = \left[\frac{(cos\theta + isin\theta)^{3\times4}}{(cos\theta + isin\theta)^{5\times2}}\right](cos\theta + isin\theta)^{-1\times2}$$

$$= \left[\frac{(cos\theta + isin\theta)^{12}}{(cos\theta + isin\theta)^{10}}\right](cos\theta + isin\theta)^{-2}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^2(cos\theta + isin\theta)^{-2}$$

هسه عند الضرب تجمع الاسس.

$$= (cos\theta + isin\theta)^0 = 1$$

كل كمية اسها صفر =1

2015-د1: -بسط المقدار

$$(cos\theta + isin\theta)^8(cos\theta - isin\theta)^4$$

هنا الاشارات مختلفة لازم نصعد الاشارة السالبة ثم عند الضرب تجمع الاسس.

$$(cos\theta + isin\theta)^8.(cos\theta - isin\theta)^4$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^8.(cos\theta + isin\theta)^{-1\times4}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^8.(cos\theta + isin\theta)^{-4}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^{8-4}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^4$$

$$= cos4\theta + i\,sin4\theta$$

- الرياضيات أقل العلوم كلفة، فعلى العكس من الفيزياء والكيمياء، إنها لا تحتاج الى أي أدوات مكلفة. كل ما يحتاجه الانسان مع الرياضيات، قلم وورقة.

جورج بوليا

اثرائي: - اذا كان $z1 = 6(2cos3\theta + 2isin3\theta)^4$ و كان $z2 = 4(\sqrt{3}cos5\theta - \sqrt{3}isin5\theta)^2$ فجد $\frac{z1}{z2}$ ؟

يوجد ارقام قبل cos,sin يجب سحبها عامل مشترك واخراجها خارج الصيغة القطبية ثم نوزع الاس.

$$\frac{z1}{z2} = \frac{6[2(cos3\theta + isin3\theta)]^4}{4[\sqrt{3}(cos5\theta - isin5\theta)]^2} = \frac{3}{2}\frac{2^4(cos3\theta + isin3\theta)^2}{(\sqrt{3})^2(cos5\theta - isin5\theta)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{16(cos\theta + isin\theta)^6}{3(cos\theta + isin\theta)^{-10}}$$

$$= 8(cos\theta + isin\theta)^6(cos\theta + isin\theta)^{10}$$

$$= 8(cos\theta + isin\theta)^{16}$$

$$= 8cos16\theta + isin16\theta$$

اثرائي: -اثبت ان $\frac{\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)^4\left(cos\frac{\pi}{4}+isn\frac{\pi}{4}\right)^{30}}{\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)^9} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$lHS = \frac{\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)^4\left(cos\frac{\pi}{4} + isn\frac{\pi}{4}\right)^{30}}{\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)^9}$$

$$= \frac{\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)\left(cos30\frac{\pi}{4} + isin30\frac{\pi}{4}\right)}{\left(cos\frac{9\pi}{6} + isin\frac{9\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)\left(cos\frac{15\pi}{2} + isin\frac{15\pi}{2}\right)}{\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)}{\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)} = cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

نتيجة مبرهنة ديموافر

شوكت استخدم نتيجة مبرهنة ديموافر؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟

- ❖ بما ان لا يمكن فتح الاس الكسر لذلك نكدر نفتحه بنتيجة ديموافر اذا طلب حل عدد مرفوع لاس كسري.

مثال جد الجذر الرابع للمقدار $(1-i)^3$ يتحول السؤال الى $(1-i)^{\frac{3}{4}}$.

- ❖ إذا طلب جذر لعدد معين. مو بس التربيعي وانما (تربيعي – تكعيبي – رابع –خامس –الخ).

$$\left(\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\text{عدد مركب}} = (\text{العدد})^{\frac{1}{n}}\right)$$

- ❖ اذا طلب حل المعادلة بصورة

$$x^n \pm \text{عدد} = 0 \rightarrow \qquad \mathbf{x} = \sqrt[n]{\text{عدد}} \rightarrow \qquad x = (\text{عدد})^{\frac{1}{n}}$$

خطوات حل نتيجة السيد ديموافر

- ✓ اذا طالب منك جذر معين لهذا العدد. تحول الجذر الى اس كسر

$$\left(\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\text{عدد مركب}} = (\text{العدد})^{\frac{1}{n}}\right)$$

- ✓ ثم اترك الجذر واخذ بس العدد. حول العدد الى صيغة قطبية حسب الطريقة المعتادة اذا كان العدد كاملا او حوله بالقوانين الاربعة السريعة اذا العدد جزء واحد.
- ✓ طبق قانون النتيجة

$$Z^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\left[cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right] \quad k = 0,1,2\ldots\ldots n-1$$

$$\theta \in R \qquad n \in Z^+$$

- ✓ عوض قيم (k) كل مرة وطلع الناتج.

اذا كان مطلوب

1-الجذر التربيعي فان قيم k=0,1

2-الجذر التكعيبي k=0,1,2 وهكذا دائما اقل من الجذر بواحد.

تبسيط الزاوية قبل تعويض قيم K

$$\frac{\frac{\pi}{S}+2k\pi}{n} = \frac{\pi+2sk\pi}{n.s}$$

Telegram: -@Amjed2017 Facebook: -amjed.salman.52 Mob: -07705795052

الحالة الأولى: - عندما يطلب جذر معين لعدد

كتاب-وزاري: -جد الجذر التكعيبي للعدد $(27i)$

$$(z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27i} = (27i)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 27i = 27 \times i = 27(cos\frac{\pi}{2} + i\, sin\frac{\pi}{2})$$

هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{Z}\left(cos\frac{\pi}{2} + i\, sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{27}\left[cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\, sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right]$$

$$= 3\left[cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\, sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right] \qquad k = 0, 1, 2$$

K=0 $\sqrt[3]{Z} = 3\left[cos\frac{\pi}{6} + i\, sin\frac{\pi}{6}\right]$ ربع اول $= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

K=1 $\sqrt[3]{Z} = 3\left[cos\frac{5\pi}{6} + i\, sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

K=2 $\sqrt[3]{Z} = 3\left[cos\frac{9\pi}{6} + i\, sin\frac{9\pi}{6}\right]$ اختصار

$= 3\left[cos\frac{3\pi}{2} + i\, sin\frac{3\pi}{2}\right]$ محورية $= 3(0 - i) = -3i$

2015-د1-نازحين: -جد الجذر التكعيبي للعدد $(8i)$

$$(z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8i} = (8i)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 8i = 8 \times i = 8(cos\frac{\pi}{2} + i\, sin\frac{\pi}{2})$$

هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{\pi}{2} + i\, sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left[cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right]$$

$$= 2\left[cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right] \; k = 0, 1, 2$$

K=0 $\quad z^{\frac{1}{3}} = 2\left[cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}+2i$

K=1 $\quad z^{\frac{1}{3}} = 2\left[cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}+i$

K=2 $\quad z^{\frac{1}{3}} = 2\left[cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right] = 2\left[cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right] = 2(0-\mathrm{i}) = -2\mathrm{i}$

2015-د1-: -جد الجذور التكعيبية للعدد $(125i)$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{125i} = (125i)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 125i = 125 \times i = 125(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$$

هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}}\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125}\left[cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right] = 5\left[cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right]$$

$k = 0, 1, 2$

K=0 $\quad z^{\frac{1}{3}} = 5\left[cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right] = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$

K=1 $\quad z^{\frac{1}{3}} = 5\left[cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$

K=2 $\quad z^{\frac{1}{3}} = 5\left[cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right] = 5\left[cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right] = 5(0-\mathrm{i}) = -5\mathrm{i}$

2016-د2-:- باستخدام ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد $\frac{1-i}{1+i}$

$$z=\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$$

$$=\frac{1-i-i+i^2}{1+1}=\frac{1-2i-1}{2}=-\frac{2i}{2}=-i$$

هسه نطبق مبرهنة ديموافر

$$\sqrt[2]{z}=\sqrt[2]{-i}=(-i)^{\frac{1}{2}}$$

$$z=-i=1\times -i=1(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$$

هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{2}}=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}}=\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right]$$

$$=\left[\cos\frac{3\pi+4k\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi+4k\pi}{4}\right]\ k=0,1$$

K=0 $z^{\frac{1}{2}}=\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$ ربع ثاني $=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

K=1 $z^{\frac{1}{2}}=\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$ ربع ثالث $=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

<<< هل يوجد فرق بين العقل الأوربي و العربي ابدا لا. لكن يوجد اختلاف هائل في الثقافة>>>>

2017-د3-: -جد الجذور التكعيبية للعدد $\left(-1+\sqrt{3}i\right)$

مباشرة نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية.

$z=-1+\sqrt{3}i$ ربع ثاني $\left(-1,\sqrt{3}\right)$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\theta=\frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الثاني $Arg\,(z)=\pi-\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi-\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق نتيجة ديموافر

$$z^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right]$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi+6k\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi+6k\pi}{6}\right)$$

$k=0,1$ لان جذر تربيعي

$k=0$ $\quad z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right]=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ ربع اول

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}.\frac{1}{2}+\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

$k=1$ $\quad z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right]=\sqrt{2}\left[\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$ ربع ثاني

$$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\sqrt{2}.\frac{1}{2}-\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

2016-د2-: -جد الجذور الأربعة للعدد (-16) باستخدام مبرهنة ديموافر.

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-16} = (-16)^{\frac{1}{4}}$$

$$z = -16 = 16 \times -1 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$$

هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}}(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right] k = 0, 1, 2, 3$$

$k = 0$ $\quad z^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ ربع اول $= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$k = 1$ $\quad z^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$ ربع ثاني $= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$k = 2$ $\quad z^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$ ربع ثالث $= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$k = 3$ $\quad z^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$ ربع رابع $= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

كتاب -جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{-64i} = (-64i)^{\frac{1}{6}}$$

$$z = -64i = 64 \times -i = 64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{64}\left[\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{3\pi + 4k\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi + 4k\pi}{12}\right] \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$k = 0$ $\quad \sqrt[6]{z} = 2\left[\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ربع اول

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$k = 1$ $\quad \sqrt[6]{z} = 2\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$

ملاحظة: -اذا كان مقام الزاوية لا يساوي _2-3-4-6_ يترك الحل كما هو بدون جواب لأنها زاوية غير خاصة

$k = 2$ $\quad \sqrt[6]{z} = 2\left[\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right]$

$k = 3$ $\quad \sqrt[6]{z} = 2\left[\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right]$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$ ربع ثالث

$$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$k = 4$ $\quad \sqrt[6]{z} = 2\left[\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right]$

$k = 5$ $\quad \sqrt[6]{z} = 2\left[\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right]$

تعلمنا الرقم (1)، وبالتالي كان من السهل علينا تعلم الرقم (2) لأن: (1+1=2)،ولكننا بعد ذلك اكتشفنا أن المسألة أكبر من ذلك بكثير. (سير/ آرثر إدينجتون عالم فيزياء)

في حياتنا شيئان مهمان: أن نتعلم الرياضيات وأن ندرِس الرياضيات. (سيمون دونيس عالم رياضيات وفيزياء)

الحالة الثانية : -اذا كان الاس كسر مرات اذا انطاك الاس كسري بصورة رقم في البسط والمقام مثلا $\left(\frac{3}{2}\right)$.

فهيج اسئلة تتطبق عليها مبرهنة ديموافر اولا وبعدين النتيجة. بحيث بالبداية. -

- تحول العدد مباشرة الى صيغة قطبية.
- -تنزل البسط (3) حسب مبرهنة ديموافر
- وتبسط الزاوية وتشوفها متجاوزة لازم تقسمها وتطلع زاوية جديدة او ما متجاوزة تتركها.
- بعدين تنزل المقام $\left(\frac{1}{2}\right)$ حسب النتيجة وتطبق قانون النتيجة وتعوض k كل مرة .

- تأخذ العدد والبسط فقط وتفتحه مربع حدانية
- الناتج تطبق عليه نتيجة ديموافر لان راح يبقى بس المقام الي يمثل جذر.
- بس اذا كان البسط (الاس) سالب او رقم اكبر من 2 روح للطريقة الاولى افضل. يعني هذا الطريقة تطبقها اذا الاس تربيع فقط.

2014-د1-: -جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد $\left(\sqrt{3}+i\right)^2$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

مطلوب

$$\sqrt[5]{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}=\left[\left(\sqrt{3}+i\right)^2\right]^{\frac{1}{5}}$$

مباشرة نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية.

ملاحظة جدا مهمة: - اذا مطلوب الصيغة القطبية بموضوع ديموافر بس تنزل الاس وتتوقف بالحل يعني ما تطلع جواب. واذا نتيجة ديموافر بعد ما تعوض قيمة k تتوقف عن الحل لان هو طالب الصيغة القطبية وليس ناتج حل.

$z=\sqrt{3}+i \qquad x=\sqrt{3} \qquad y=1$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\theta=\frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الاول لان الاشارات موجبة اثنينهن $Arg\,(z)=\theta=\frac{\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر على البسط وبعدين نطبق النتيجة على المقام.

$$z^2 = 2^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$= 4\left(\cos 2.\frac{\pi}{6} + i\sin 2\ \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\ \frac{\pi}{3}\right)$$

هسه ننزل الاس الي بالمقام$(\frac{1}{5})$ بتطبيق نتيجة ديموافر.

$$(z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right] \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$= (4)^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\pi + 6k\pi}{15} + i\sin\frac{\pi + 6k\pi}{15}\right] \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

K= 0 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right]$

يترك كما هو لان المطلوب صيغة قطبية فقط. ولان المقام مالت الزاوية =15 وما عدنا هيج زاوية.

K=1 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right]$

K=2 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right]$

K=3 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right]$

K=4 $\quad z^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right] = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$

ملاحظة مهمة: - اذا طلب الصيغة القطبية فقط نعوض k ونتوقف لكن لو طلب جد الجذر لازم نطلع جواب نهائي.

2015-د2-خارج العراق-: -جد الجذور التكعيبية للعدد $(1+i)^2$ باستخدام مبرهنة ديموافر.

مطلوب الجذر التكعيبي. لو احول السؤال مثل السؤال الفوك واحله. لو ما دام الاس =2 اكدر افتح مربع حدانية والناتج الي يطلع نأخذ له الجذر التكعيبي حسب نتيجة ديموافر.

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

هسه المطلوب مني هو جذر تكعيبي.

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2i} = (2\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$$

نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية. ومادام مكون من جزء واحد نحوله بالطريقة السريعة.

$z = 2i = 2 \times i = 2\ \left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$ القطبية السريعة

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق نتيجة ديموافر للاس الكسري

$$(z)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{1}{3}}\left[cos\ \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right]$$

$$(z)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{1}{3}}\left[cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right] \qquad k = 0, 1, 3$$

K=0 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right]$ ربع اول $= \sqrt[3]{2}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

K=1 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= \sqrt[3]{2}\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

K=3 $\quad (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right] = \sqrt[3]{2}\left[cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right]$ محورية $= \sqrt[3]{2}[0 - i\,]$

2017-دور1 .احيائي جد باستخدام مبرهنة ديموافر $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-\frac{3}{2}}$

مباشرة نعوف الاس وننطلق نأخذ بس العدد نحوله الى صيغة قطبية.

$z = \sqrt{3} + i \qquad x = \sqrt{3} \qquad y = 1$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$

زاوية الاسناد هي $\quad \theta = \frac{\pi}{6}$

وتقع في الربع الاول $\quad Arg\ (z) = \theta = \frac{\pi}{6}$

هسه نكتب الصيغة القطبية

$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta\ )$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

هسه مو خلصنا من الصيغة القطبية راح نطبق ديموافر على البسط وبعدين نطبق النتيجة على المقام.

$$z^{-3} = 2^{-3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-3} = \frac{1}{2^3}\left(\cos -3.\frac{\pi}{6} + i\sin -3\ \frac{\pi}{6}\right)$$

هسه نختصر ونعبر اشارة $sin\theta$ ونحذف اشارة $cos\theta$.

$$z^{-3} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

هسه ننزل الاس الي بالمقام$(\frac{1}{2})$ بتطبيق نتيجة ديموافر .

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} - i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right] \qquad k = 0, 1$$

$$(z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} - i\sin\frac{\pi+4k\pi}{2}\right] \qquad k = 0, 1$$

$k = 0$

$$z^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$ ربع اول

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

$k = 1$

$$z^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\frac{5\pi}{4} - i\sin\frac{5\pi}{4}\right]$$ ربع ثالث

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - -\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

تابعونا على التلغرام على القناة الخاصة $@xymath$

حل المعادلات بنتيجة ديموافر

1- تستطيع نتيجة ديموافر(في السادس) حل اي معادلة بشرط ان تكون المعادلة ذات حدين $\left(x^n \mp \text{رقم} = 0\right)$.واذا كانت بصورة تحليل قوسين لازم نرجعها الى اصلها قبل التحليل ثم نتبع الحل .

2- خطوات الحل هي :-أ-نجعل المعادلة بصورة $\left(x^n = \text{رقم}\right)$ بنقل الرقم .

ب-نأخذ الجذر للطرفين لتصبح $\left(\text{رقم}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\text{رقم}} = x$ والرقم لا تتلاعب بيه نهائيا .

ج-هسه صارت نتيجة ديموافر لان جذر.

د-نفرض $\left(z = \text{رقم}\right)$ ثم نحوله الى صيغة قطبية .

ه-ثم ننزل الجذر وتنحل بالنتيجة.

2015 د4 : - جد حسب نتيجة مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$.

$x^3 = 8i \qquad x = \sqrt[3]{8i} = (8i)^{\frac{1}{3}}$

$$z = 8i = 8 \times i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

هسه ينزل الجذر

$$x = z^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right] = 2\left[\cos\frac{\pi+4k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+4k\pi}{6}\right] \quad k = 0,1,2$$

K=0 $\quad x_1 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + 2i$

K=1 $\quad x_2 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$ ربع ثاني $= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

K=2 $\quad x_3 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right] = 2\left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right] = 2(0 - i) = -2i$

$$s = \{\sqrt{3} + 2i, -\sqrt{3} + 2i, -2i\}$$

2017-د2:- جد حسب نتيجة مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^3 + i = 0$.

$x^3 = -i \qquad x = \sqrt[3]{-i} = (-i)^{\frac{1}{3}}$

$$z = -i = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

$$x = z^{\frac{1}{3}} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{3}} = \left[\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right] = \left[\cos\frac{3\pi + 4k\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi + 4k\pi}{6}\right]$$

$k = 0, 1, 2$

K=0 $\qquad x_1 = z^{\frac{1}{3}} = \left[\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right] = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 0 + i$

K=1 $\qquad x_2 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right]$ ربع ثالث $= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

K=2 $\qquad x_3 = z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right]$ ربع رابع $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$$s = \left\{0 + i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$$

2017-د2:- جد حسب نتيجة مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^4 - 1 = 0$.

$x^4 = 1 \qquad x = \sqrt[4]{1} = (1)^{\frac{1}{4}}$

$$z = 1 = (\cos 0 + i\sin 0)$$

$$x = z^{\frac{1}{4}} = (\cos 0 + i\sin 0)^{\frac{1}{4}}$$ هسه ينزل الجذر

$$z^{\frac{1}{4}} = \left[\cos\frac{0 + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{4}\right]$$

$$= \left[\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

K=0 $\quad z^{\frac{1}{4}} = [\cos 0 + i\sin 0] = 1 + 0i = 1$

K=1 $\quad z^{\frac{1}{4}} = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 0 + \mathrm{i} = i$

K=2 $\quad z^{\frac{1}{4}} = [\cos\pi + i\sin\pi] = -1 + 0i = -1$

K=3 $\quad z^{\frac{1}{4}} = \left[\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right] = 0 - i = -i$

$$s = \{1, -1, i, -i\}$$

الإعدام أخف عقاب

يتلقاه الفرد العربي.

أهنالك أقسى من هذا؟

- طبعاً..

فالأقسى من هذا

أن يحيا في الوطن العربي!

احمد مطر.

تابعونا على التلغرام على القناة الخاصة @xymath


DES:ALI ADEL
Insta:3A.9K
الرياضيات ٢٠١٩
الفصل الثاني القطوع المخروطية
للصف السادس الإعدادي
إعداد الاستاذ أمجد سلمان

الفصل الثاني يأتي وزاريا فرعين منه بواقع 20 درجة.

وما يجب على الطالب معرفته فيه والتركيز عليه.

القطع المكافيء

- ☒ كيفية استخراج البؤرة والدليل والمحور — اهميته 1%
- ☒ إيجاد المعادلة من المعلومات او بالتعريف — أهميته 10%
- ☒ القطع المكافي اذا كان يحتوي على مجهول في معادلته او دليله — أهميته 20%

القطع الناقص

- ☒ إيجاد معلومات القطع اذا كانت المعادلة معطاة — أهميته 10%
- ☒ إيجاد المعادلة المجهولة للقطع الناقص من المعلومات وله عدة حالات:-
  - ➢ إيجاد المعادلة اذا كانت اطوال المحاور او البؤرة او الرؤوس موجودة — 20%
  - ➢ إيجاد المعادلة اذا كان السؤال يربط قطع ناقص مع مكافئ وملاحظات أخرى — 70%
  - ➢ إيجاد قيم k,h في المعادلة المجهولة — 50%
  - ➢ إيجاد المعادلة بالتعريف — 10%

القطع الزائد

- ☒ إيجاد معلومات القطع اذا كانت المعادلة معلومة — 10.5%
- ☒ إيجاد المعادلة المجهولة للقطع الزائد من المعلومات وله عدة حالات:-
  - ➢ إيجاد المعادلة اذا كانت اطوال المحاور او البؤرة او الرؤوس موجودة — 20%
  - ➢ إيجاد المعادلة اذا كان السؤال يربط قطع زائد مع ناقص او مكافئ وملاحظات أخرى — 70%
  - ➢ إيجاد قيم k,h في المعادلة المجهولة — 50%
  - ➢ إيجاد المعادلة بالتعريف — 10%

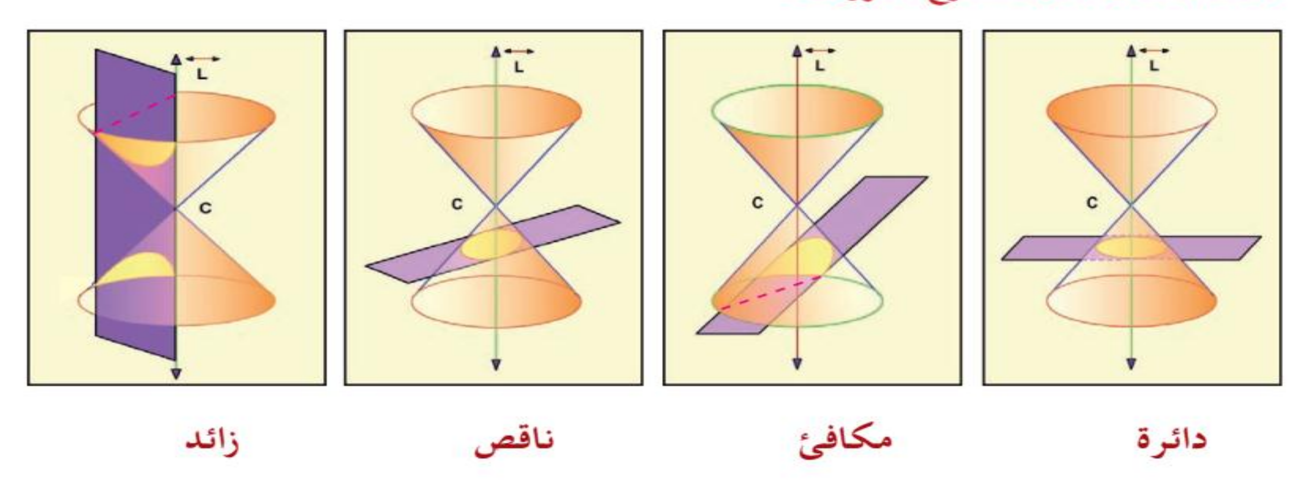
توضيحات وكذا

القطوع المخروطية: - اشكال هندسية تتكون نتيجة لقطع المخروط الدائري القائم بمستوى معين.

اذا قطع سطح المخروط الدائري القائم

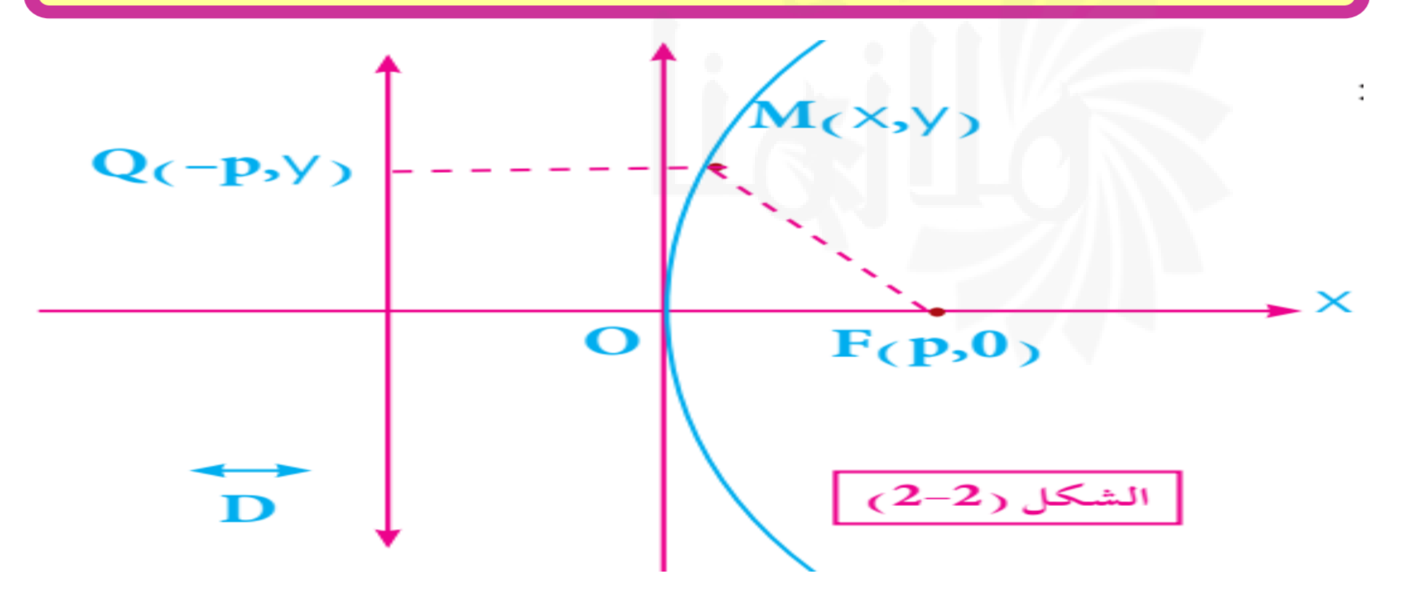
* بمستوٍ عمودي على محور المخروط الدائري القائم ولا يحوي رأس المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى دائرة (Circle) .
* بمستوٍ موازٍ لأحد مولداته فأن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع المكافئ "Parabola" .
* بمستوٍ غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي احد مولداته فأن القطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الناقص "Ellipse".
* بمستوٍ يوازي محور المخروط الدائري القائم ويقطع مولدين من مولدات المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الزائد "Hyperbola" .

لاحظ الاشكال التالية للقطوع المخروطية :

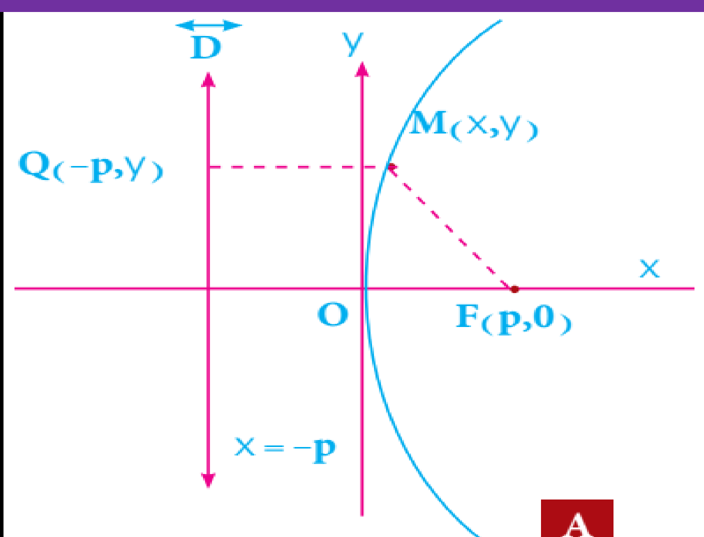


القطع المكافئ Parabola

مجموعة من النقاط M(X,Y) في المستوي بعدها عن نقطة معلومة تسمى البؤرة F يساوي بعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل D .



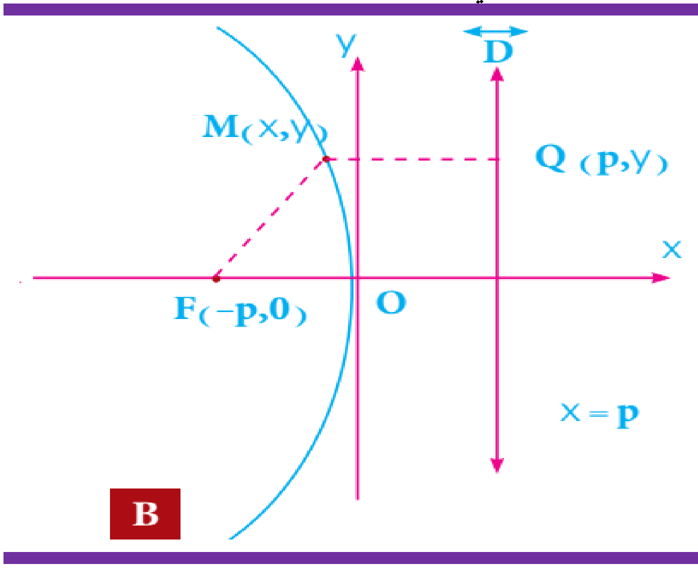
البؤرة تنتمي لمحور السينات الموجب الفتحة لليمين



البؤرة	$f(p\,,0)$
الدليل	$x=-p$
المحور	$y=0$
المعادلة	$y^2=4px$

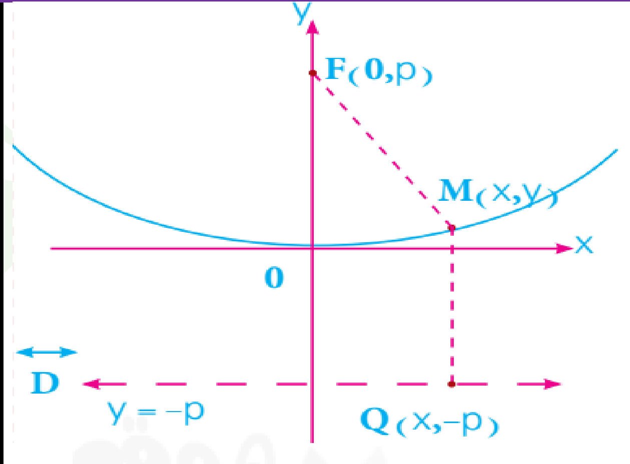


البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب الفتحة لليسار



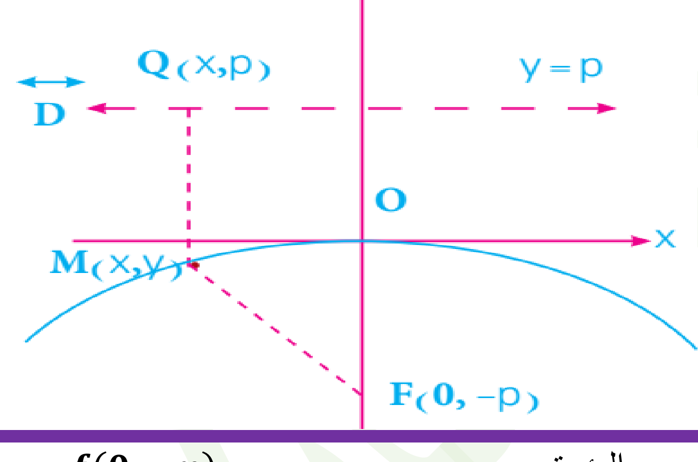
البؤرة	$f(-p\,,0)$
الدليل	$x=p$
المحور	$y=0$
المعادلة	$y^2=-4px$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب الفتحة للأعلى



البؤرة	$f(0\,,p)$
الدليل	$y=-p$
المحور	$x=0$
المعادلة	$x^2=4py$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات السالب الفتحة للأسفل



البؤرة	$f(0\,,-p)$
الدليل	$y=p$
المحور	$x=0$
المعادلة	$x^2=-4py$

A- اسئلة ايجاد البؤرة والدليل والمحور اذا اعطى المعادلة.

- يجب ان يكون معامل $x^2.y^2$ يساوي=1 واذا مو واحد قسم على ذلك الرقم .
- المعادلة ما تساوي صفر وإذا تساوي صفر انقل x ,yوالي الاس مالتها واحد الى جهة الصفر.
- هسه نحدد موقع البؤرة من خلال x ,y الي **الاس مالته واحد** ومن **الاشارة الي بعد اليساوي** نعرف الاتجاه
- قارن المعادلة مع القياسية وطلع قيمة p=عدد موجب دائما. وعوضها بالبؤرة والدليل.
- القطع المكافئ والبؤرة اثنينهم نفس المحور والاشارة. اما الدليل عكسهم بالإشارة دائما بس نفس المحور.

كتاب-امثلة-تمارين2-1: - في كل مما يأتي جد البؤرة والدليل والمحور للقطوع التالية

1) $y^2 = -8x$

البؤرة تقع على محور السينات السالب

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$-----$بالمقارنة$\quad -4p = -8$

$p = \frac{-8}{-4} = 2$

$f(-p,0)$

$\rightarrow f(-2,0)$ البؤرة

معادلة الدليل $\quad x = +p \qquad x = 2$

معادلة المحور $\quad y = 0$

---

2) $y^2 = 4x$

البؤرة تقع على محور السينات الموجب

$y^2 = 4x$

$y^2 = 4px$

$-----$بالمقارنة$\quad 4p = 4$

$p = \frac{4}{4} = 1$

$f(p,0) \rightarrow f(1,0)$ البؤرة

معادلة الدليل $\quad x = -p \qquad x = -1$

معادلة المحور $\quad y = 0$

---

3) $3x^2 - 24y = 0$

نبسط المعادلة أولا.

$3x^2 = 24y \quad \div 3$

$x^2 = 8y$

البؤرة تقع على محور الصادات الموجب

$x^2 = 8y$

$x^2 = 4py$

$-----$بالمقارنة$\quad 4p = 8$

$p = \frac{8}{4} = 2$

$f(0,p) \rightarrow f(0,2)$ البؤرة

معادلة الدليل $\quad y = -p \qquad y = -2$

معادلة المحور $\quad x = 0$

4) $x^2 = -4y$

البؤرة تقع على محور الصادات السالب

$x^2 = -4y$

$x^2 = -4py$

$-----$بالمقارنة$\quad -4p = -4$

$p = \frac{-4}{-4} = 1$

$f(0,-p) \rightarrow f(0,-1)$ البؤرة

معادلة الدليل $\quad y = p \qquad y = 1$

معادلة المحور $\quad x = 0$

---

5) $2x + 16y^2 = 0$

نبسط المعادلة أولا. لازم معامل المتغير التربيعي يصير واحد ولازم المعادلة ما تساوي صفر بحيث ننقل المتغير ذو الدرجة الأولى.

$16y^2 = -2x \quad \div 16$

$y^2 = -\frac{2}{16}x$

$y^2 = -\frac{1}{8}x$

البؤرة تقع على محور السينات السالب

$y^2 = -\frac{1}{8}x$

$y^2 = -4px$

$-----$بالمقارنة$\quad -4p = -\frac{1}{8}$

$p = \frac{-\frac{1}{8}}{-4} = \frac{1}{32}$

$f(-p,0) \rightarrow f\left(-\frac{1}{32},0\right)$ البؤرة

معادلة الدليل $\quad x = p \qquad x = -\frac{1}{32}$

معادلة المحور $\quad y = 0$

B-ايجاد المعادلة القياسية من المعلومات المعطاة في السؤال.

1-اذا انطاك بؤرة ستسوى :-

البؤرة على محور السينات	البؤرة على محور الصادات
$F(\pm p,0)\begin{cases} f(p,0) \xrightarrow{\text{المعادلة}} y^2 = 4px \\ f(-p,0) \xrightarrow{\text{المعادلة}} y^2 = -4px \end{cases}$	$F(0,\pm p)\begin{cases} f(0,p) \xrightarrow{\text{المعادلة}} x^2 = 4py \\ f(0,-p) \xrightarrow{\text{المعادلة}} x^2 = -4py \end{cases}$

من البؤرة ناخذ الرقم موجب دائما سواء كانت البؤرة موجب او سالب ليمثل قيمة p ثم نكتب المعادلة ونعوضها بيها

كتاب-امثلة-تمارين2-1: - في كل مما يأتي جد معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته

$1)F(3,0) \xrightarrow{\text{اذن}} p = 3$

البؤرة تقع على محور السينات الموجب
اذن المعادلة

$y^2 = 4px$
$y^2 = 4(3)x$
$y^2 = 12x$

$2)F(0,5) \xrightarrow{\text{اذن}} p = 5$

البؤرة تقع على محور الصادات الموجب
اذن المعادلة

$x^2 = 4py$
$x^2 = 4(5)y$
$x^2 = 20y$

$3)F(-6,0) \xrightarrow{\text{اذن}} p = 6$

البؤرة تقع على محور السينات السالب
اذن المعادلة

$y^2 = -4px$
$y^2 = -4(6)x$
$y^2 = -24x$

$4)F(0,-5) \xrightarrow{\text{اذن}} p = 5$

البؤرة تقع على محور الصادات السالب
اذن المعادلة

$x^2 = -4py$
$x^2 = -4(5)y$
$x^2 = -20y$

$5)F\left(0,\frac{4}{3}\right) \xrightarrow{\text{اذن}} p = \frac{4}{3}$

البؤرة تقع على محور الصادات الموجب
اذن المعادلة

$x^2 = 4py$
$x^2 = 4\left(\frac{4}{3}\right)y$
$x^2 = \frac{16}{3}y$

$6)F\left(-\frac{5}{6},0\right) \xrightarrow{\text{اذن}} p = \frac{5}{6}$

البؤرة تقع على محور السينات السالب
اذن المعادلة

$y^2 = -4px$
$y^2 = -4(\frac{5}{6})x$
$y^2 = -2.\frac{5}{3}x$
$y^2 = -\frac{10}{3}x$

2-اذا انطى معادلة الدليل شتسوي

- بسط المعادلة بحيث تصير $y =$ رقم لو $x =$ رقم
- اخذ الرقم بدون اشارة ليمثل قيمة p.
- حدد لمن ينتمي الدليل من رمز x ,y
- اذا الدليل موجب يعنى (البؤرة والمعادلة مالت القطع سالب) واذا الدليل سالب فان البؤرة موجب
- اكتب المعادلة وعوض.

كتاب-امثلة-تمارين2-1: - في كل مما يأتي جد معادلة القطع المكافيء الذي معادلة دليله

$1)\ y = 7 \xrightarrow{\text{اذن}} p = 7$

الدليل يقع على محور الصادات الموجب
البؤرة تقع على محور الصادات السالب
اذن المعادلة

$x^2 = -4py$
$x^2 = -4(7)y$
$x^2 = -28y$

$2)\ 2x - 6 = 0$
$2x = 6 \quad \div 2$
$x = 3 \xrightarrow{\text{اذن}} p = 3$

الدليل يقع على محور السينات الموجب
البؤرة تقع على محور السينات السالب
اذن المعادلة

$y^2 = -4px$
$y^2 = -4(3)x$
$y^2 = -12x$

$3)\ 4y + 3 = 0$
$4y = -3$
$y = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{اذن}} p = \frac{3}{4}$

الدليل يقع على محور الصادات السالب
البؤرة تقع على محور الصادات الموجب
اذن المعادلة

$x^2 = 4py$
$x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$
$x^2 = 3y$

$4)\ 2x - 3 = 0$
$2x = 3$
$x = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اذن}} p = \frac{3}{2}$

الدليل يقع على محور السينات الموجب
البؤرة تقع على محور السينات السالب
اذن المعادلة

$y^2 = -4px$
$y^2 = -4(\frac{3}{2})x$
$y^2 = -6x$

$4)\ -\frac{2}{3}x - \frac{7}{2} = 0$
$-\frac{2}{3}x = \frac{7}{2} \quad \times -6$
$4x = -21$
$x = -\frac{21}{4} \xrightarrow{\text{اذن}} p = \frac{21}{4}$

الدليل يقع على محور السينات السالب
البؤرة تقع على محور السينات الموجب
اذن المعادلة

$y^2 = 4px$
$y^2 = 4(\frac{21}{4})x$
$y^2 = 21x$

3-اذا انطى القطع المكافيء يمر بالنقطتين $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$:-

- لو ترسم وتشوف اتجاه القطع لو تشوف النقطتين منو الي ثابت بيهن وما متغير فالقطع ينتمي له.
- اكتب المعادلة المطلوبة بعد تحديدها.
- اخذ وحدة من النقاط وعوضها بالمعادلة وطلع p
- وارجع عوضها بالمعادلة من جديد.

كتاب-امثلة-جد معادلة القطع المكافيء الذي يمر بالنقطتين $(2, 4)(2, -4)$

الحل:-

قيمة x=2 ثابتة لم تتغير اذن القطع متناظر حول محور السينات الموجب

اذن البؤرة ننتمي لمحور السينات الموجب. نكتب المعادلة ونعوض أحد النقاط لنجد قيمة p

$$y^2 = 4px$$

$(2, 4)$ تنتمي للقطع المكافيء تحقق معادلته. نعوضها ونجد قيمة p

$$4^2 = 4p.\ 2 \qquad 16 = 8p \qquad p = 2$$

هسه نرجع نعوض p في المعادلة

$$y^2 = 4px \rightarrow y^2 = 4.2x \rightarrow y^2 = 8x.$$

من يعـــش في خـــــوف لن يكون حــــــرا أبــدا

4-اذا انطى نقطة (x ,y) يمر بها دليل القطع المكافيء فهنا لازم تعرف موقع البؤرة

- اذا كان موقع البؤرة لمحور السينات تاخذ قيمة x من النقطة لتمثل الدليل وتحل مثل حل الدليل.
- وإذا تنتمي للصادات تاخذ قيمة y لتمثل الدليل وتحل مثل حل الدليل السابق.
- اذا ما كايل المن ينتمي القطع ولا منطي البؤرة او محددها المن تنتمي. نأخذ الاحتمالين للدليل. مرة للسينات ومرة للصادات.

مثال جد معادلة القطع المكافيء الذي يمر بالنقطتين $(3, -5)$

الحل بما انه لم يحدد موقع البؤرة ولم يحدد لمن ينتمي القطع . ناخذ احتمالين

إ-اذا كانت البؤرة على السينات

الدليل هو $x = 3$

الدليل ينتمي لمحور السينات الموجب $p = 3$

البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب.

نكتب معادلة القطع ونعوض.

$$y^2 = -4px$$
$$y^2 = -4.3x$$
$$y^2 = -12x$$

ب-اذا كانت البؤرة على الصادات

الدليل هو $y = -5$ $p = 5$

الدليل ينتمي لمحور الصادات السالب $p = 5$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب.

نكتب معادلة القطع ونعوض.

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4.5y$$
$$x^2 = 20\ y$$

مثال جد معادلة القطع المكافيء الذي يمر بالنقطتين $(-3,4)$

الحل بما انه لم يحدد موقع البؤرة ولم يحدد لمن ينتمي القطع . ناخذ احتمالين

إ-اذا كانت البؤرة على السينات

الدليل هو $x=-3$

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب $p=3$

البؤرة تنتمي لمحور السينات الموجب.

نكتب معادلة القطع ونعوض.

$y^2=4px$

$y^2=4.3x$

$y^2=12x$

ب-اذا كانت البؤرة على الصادات

الدليل هو $y=4$

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب $p=4$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات السالب.

نكتب معادلة القطع ونعوض قيمة p فيها.

$x^2=-4py$

$x^2=-4.4y$

$x^2=-16\,y$

5-ايجاد المعادلة باستخدام التعريف

- تفرض نقطة تقع على القطع المكافيء اسمها $M(x\,,y)$.
- لازم ينطي بؤرة او معادلة دليل تحولها الى بؤرة بعكس الإشارة.
- ثم تكتب نقطة على الدليل تقابل الM ونسميها D اما قيمتها راح نتبع المخطط

اذا كانت البؤرة	فان نقطة الدليل تصبح
$f(0,\pm p)$	$D(x,\mp p)$
$f(\pm p,0)$	$D(\mp p,y)$

- من قانون تعريف القطع المكافيء $MF=MD=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته $f(7\,,0)$

الحل:-

البؤرة هي $f(7\,,0)$ تنتمي لمحور السينات الموجب

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب

اذن معادلة الدليل هي $x=-7$

نفرض نقطة M(x ,y) تنتمي للقطع المكافيء .

توجد نقطة على الدليل D(-7 , y)

ومن تعريف القطع المكافيء

$MF=MD$

$$\overbrace{\sqrt{(X-7)^2+(y-0)^2}}^{MF}=\overbrace{\sqrt{(X+7)^2+(y-y)^2}}^{MD}$$

$$\sqrt{(X-7)^2+y^2}=\sqrt{(X+7)^2}$$

من تربيع الطرفين

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافيء الذي معادلة دليله $y=\sqrt{3}$.

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب $y=\sqrt{3}$

اذن البؤرة تنتمي لمحور الصادات السالب. $P=\sqrt{3}$

اذن قيمة البؤرة هي

البؤرة هي $f(0\,,-\sqrt{3})$

نفرض نقطة M(x ,y) تنتمي للقطع المكافيء .

توجد نقطة على الدليل D(X , $\sqrt{3}$)

ومن تعريف القطع المكافيء

$MF=MD$

$$(X-7)^2+y^2=(X+7)^2$$

نفتح الاقواس كمربع حدانية.

$$x^2-14x+49+y^2=x^2+14x+49$$

نختصر المتشابهات على الطرفين ومتشابهين بالاشارة فقط.

$$-14x+y^2=14x$$

ننقل الي اسه واحد بطرف والتربيع في طرف اخر .

$$y^2=14x+14x$$

$$y^2=28x$$

اذن المعادلة هي

$$y^2=28x$$

"""من كان يحيا بمحاربة عدو ما، تصبح له مصلحة في الابقاء على هذا العدو حياً"""

فردريك نيتشه

إن الحياة لا تتغير إطلاقاً.. وأن جميع أنواع الحياة تتساوى على أية حال ..البير كامو

$$\overbrace{\sqrt{(X-0)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}}^{MF}=\overbrace{\sqrt{(X-x)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}}^{MD}$$

$$\sqrt{X^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(y-\sqrt{3}\right)^2}$$

من تربيع الطرفين

$$X^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=\left(y-\sqrt{3}\right)^2$$

نفتح الاقواس كمربع حدانية.

$$X^2+y^2+2\sqrt{3}y+3=y^2-2\sqrt{3}y+3$$

نختصر المتشابهات على الطرفين ومتشابهين بالإشارة فقط.

$$x^2+2\sqrt{3}y=-2\sqrt{3}y$$

ننقل الي اسه واحد بطرف والتربيع في طرف اخر.

$$x^2=-2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}y$$

اذن المعادلة هي

$$x^2=-4\sqrt{3}y$$

رسم القطع المكافيء:-

1-حدد موقع البؤرة وموقع الدليل على الاحداثيات

2-اكتب المعادلة على جهة. 3-سوي جدول بين x ,y وافرض رقم ل x او y الي الاس مالتها =1 بحيث من تعوضه كون يطلع ناتج اله جذر . واذا بالمعادلة سالب لازم الرقم الي تفرضه سالب حتى يحذف السالب.

4-راح تصير نقطتين (x1 ,y1) (x1 ,y2) وعندك نقطة الاصل توصل بينهم بشكل قوس.

===

س \\\ ارسم منحني القطع المكافيء الذي معادلته $x^2=-4y$.

راح أسوي جدول وافرض قيمة y لان اسها =1 وثانيا افرضها سالب حتى اتخلص من السالب الي بالمعادلة.

Y	X
-1	∓ 2

$$x^2=-4\times-1$$

$$x^2=4 \qquad \sqrt{\text{للطرفين}}$$

$$x=\mp 2$$

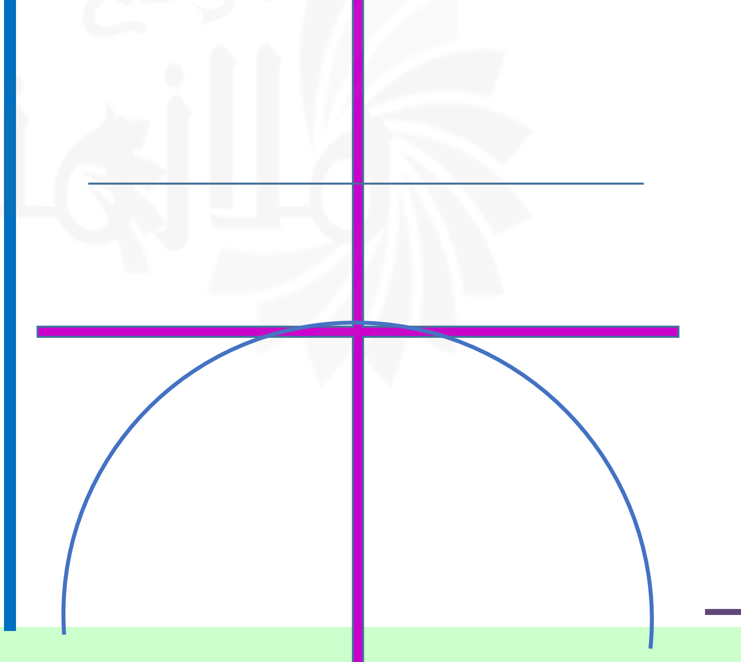
اذن حصلنا نقطتين هما

$$(2,-1)(-2,-1)$$

$$f(0,-1) \quad \text{البؤرة}$$

الدليل

$$y=+p=1$$



معادلة قطع مكافئ تحتوى مجهول

- إذا انطاك نقطة يمر بها القطع المكافيء تعوضها بالمعادلة وتطلع المجهول.
- اذا انطى نقطة يمر بها الدليل. اجعل المعادلة قياسية ,ثم حدد منها لمن تنتمي البؤرة واتركها . اخذ الدليل من النقطة وطلع منه p ثم اكتب معادلة القطع وعوض بيها قيمة p. قارن المعادلتين وطلع المجهول.

اثرائي: -جد قيمة h في القطع المكافئ الذي يمر بالنقطة $(-2,4)$

(-2,4) يمربها القطع اذن تحقق معادلته .نعوضها

$4^2=-8h\times-2\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad 16=16h \quad h=1$

اثرائي: -جد قيمة m في القطع المكافئ $x^2=(3-m)y$ الذي يمر دليله بالنقطة $(-4,8)$

الحل :- البؤرة تنتمي لمحور الصادات (بس مانعرف الموجب لو السالب لان اكو m مجهولة).

الدليل هو $y=8$ اذن الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب (عكس البؤرة دائما) p=8

اذن البؤرة تنتمي لمحور الصادات السالب $x^2=-4py$

$x^2=-4.8y$

$x^2=-32y$

$x^2=(3-m)y.$

نقارن المعادلة الي بيها مجهول وي هاي المعادلة

$3-m=-32\rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad 3+32=m \quad m=35$

2008-تمهيدي: -قطع مكافئ معادلته $\frac{1}{4}y^2=hx$ و يمر دليله بالنقطة $(-6,3)$ جد قيمة h

الحل . نرتب المعادلة يعني نسويها قياسية . $\frac{1}{4}y^2=hx \quad \times 4 \quad \rightarrow\rightarrow y^2=4hx$

البؤرة تنتمي لمحور السينات . [ناخذ قيمة x من النقطة ونسويها الدليل] الدليل ينتمي للسينات السالب $x=-6$

P=6

البؤرة ينتمي لمحور السينات الموجب

$y^2=4px\rightarrow p=6 \quad \rightarrow y^2=24x\,.$

$y^2=4hx$

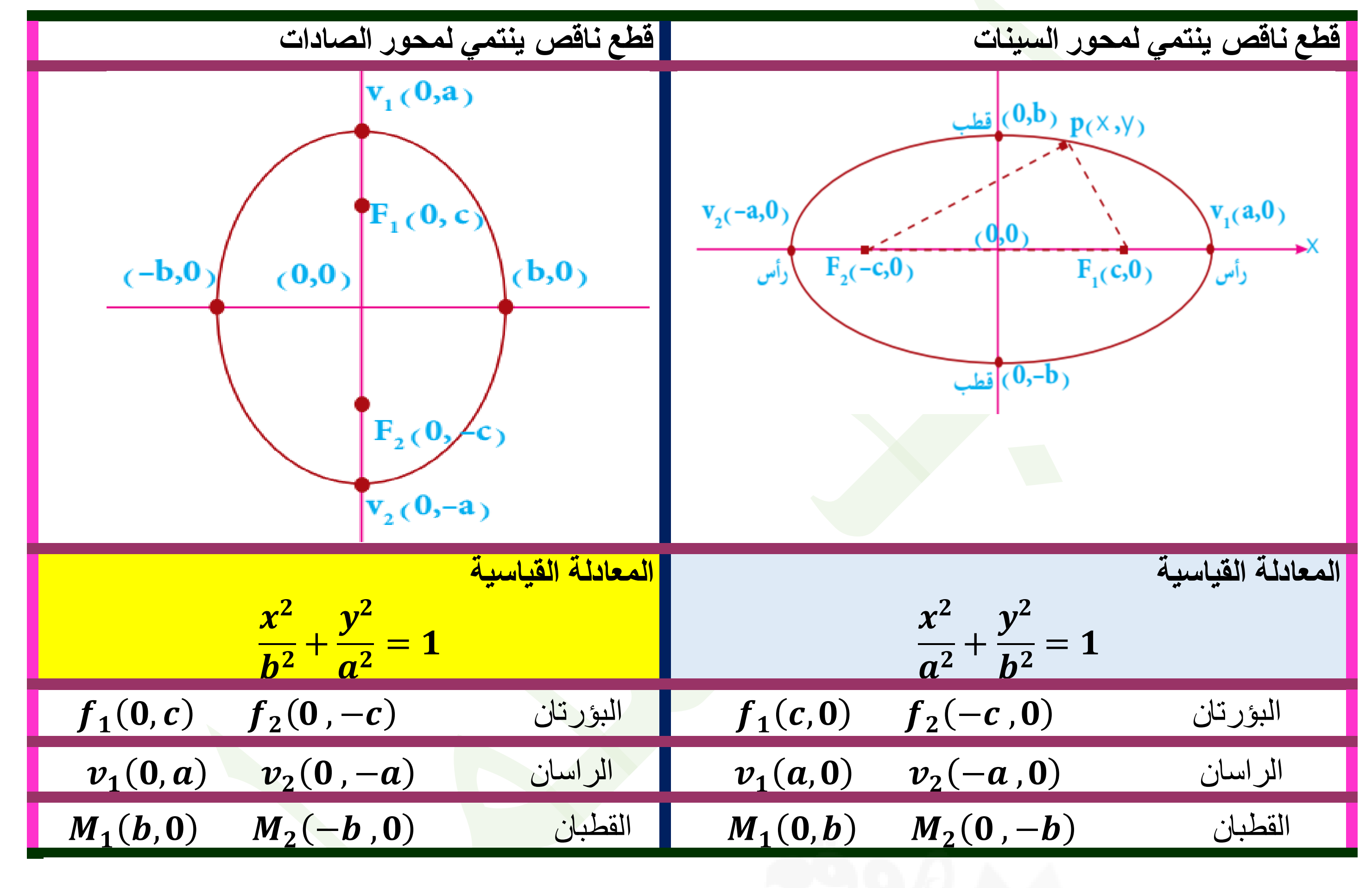
$4h=24 \quad h=6$

القطع الناقص Ellipse

القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت .

يعني ان مجموع المسافتين من أي نقطة M (x,y) بشرط تنتمي للقطع الى البؤرتين F1,F2 تبقى ثابتة =2a .

$$p\,F_1 + pF_2 = 2a$$



قطع ناقص ينتمي لمحور السينات			قطع ناقص ينتمي لمحور الصادات		
المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$			المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$		
البؤرتان	$f_2(-c\,,0)$	$f_1(c,0)$	البؤرتان	$f_2(0\,,-c)$	$f_1(0,c)$
الراسان	$v_2(-a\,,0)$	$v_1(a,0)$	الراسان	$v_2(0\,,-a)$	$v_1(0,a)$
القطبان	$M_2(0\,,-b)$	$M_1(0,b)$	القطبان	$M_2(-b\,,0)$	$M_1(b,0)$

معلومات مهمة كلش حيل :-

١-معادلة القطع الناقص ذات متغيرين و من الدرجة الثانية والمعادلة =١ , ويجب ان تساوي .

٢-اذا المعادلة ماتساوي واحد قسم على ذلك الرقم اولا قبل كلشي .

٣-معامل كل من (x^2, y^2) يجب =١ واذا ما ساوى اقلب العدد دقلتين خليه يصير مقام للمقام .

٤-مهم كلشششششش:- نعرف لمن ينتمي القطع الناقص من خلال المقام الاكبر وين يصير فان المعادلة تنتمي له .

٥-نستخدم هنا قانون مهم كلش :- المنقذ هذا حلال مشاكل بشكل مو طبيعي

$$c^2 = a^2 - b^2$$

قوانين كثير مهمة :-

في كل اسئلة القطع الناقص دير بالك تنسى ترى
$a > c, \quad a > b.$

١-طول المحور الكبير=المسافة بين رأسيه=العدد الثابت =2a

٢-طول المحور الصغير=المسافة بين قطبيه=المسافة بين رأسيه الصغيرين=2b

٣-البعد البؤري =البعد بين البؤرتين= 2c

٤-مساحة القطع الناقص $A = a.b\pi$

٥-محيط القطع الناقص $p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

٦-الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad e < 1$

==

مثال-كتاب: -في كل مما يأتي جد طول المحورين واحداثي كل من البؤرتين والراسين والاختلاف المركزي للقطوع

① $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

البؤرتان على محور السينات $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

نقارنه مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 25 \quad b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

اذن

$a = 5 \quad , \quad b = 4 \quad c = 3$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الكبير

$2a = 2.5 = 10$ وحدة طول

طول المحور الصغير

$2b = 2.4 = 8$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(c,0) \quad f_2(-c,0)$

البؤرتان $f_1(3,0) \quad f_2(-3,0)$

الراسان $v_1(a,0) \quad v_2(-a,0)$

الراسان $v_1(5,0) \quad v_2(-5,0)$

القطبان $M_1(0,b) \quad M_2(0,b)$

القطبان $M_1(0,4) \quad M_2(0,-4)$

نجد مساحة والمحيط زيادة خير ولو ما مطلوب منا.

$A = a.b\pi = 5.4\pi = 20\pi$ وحدة مربعة

$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25+16}{2}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$

وحدة طول

البعد البؤري=البعد بين البؤرتين

$2c = 2.3 = 6$ وحدة طول

الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$

② $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

نجعل المعادلة قياسية. يعني =1 والمعاملات =1
نقسم على 4\3

$\frac{4x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{3y^2}{\frac{4}{3}} = 1$

نكلب المعاملات نخليهن يصيرن مقام للمقام.

$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{3y^2}{4} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{4}{12}} + \frac{3y^2}{\frac{4}{9}} = 1$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات

$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ نقارنه مع المعادلة القياسية

$a^2 = \frac{4}{9} \qquad b^2 = \frac{1}{3}$

$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4-3}{9} = \frac{1}{9}$

اذن

$a = \frac{2}{3} \quad , \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad c = \frac{1}{3}$

هسه نطلع المطلوب منا
طول المحور الكبير

$2a = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ وحدة طول

طول المحور الصغير

$2b = 2.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(0,c) \qquad f_2(0,-c)$

البؤرتان $f_1\left(0,\frac{1}{3}\right) \qquad f_2\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

الراسان $v_1(0,a) \qquad v_2(0,-a)$

الراسان $v_1\left(0,\frac{2}{3}\right) \qquad v_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} < 1$

$9x^2 + 13y^2 = 117$

نجعل المعادلة قياسية. يعني =1 والمعاملات =1
نقسم على 117

$\frac{9x^2}{117} + \frac{13y^2}{117} = 1$

نختصر البسط مع المقام.

$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

البؤرة تنتمي لمحور السينات

$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نقارنه مع المعادلة القياسية

$a^2 = 13 \qquad b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 = 13 - 9 = 4$

اذن

$a = \sqrt{13} \quad , \quad b = 3 \qquad c = 2$

هسه نطلع المطلوب منا
طول المحور الكبير

$2a = 2.\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$ وحدة طول

طول المحور الصغير

$2b = 2.3 = 6$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(c,0) \qquad f_2(-c,0)$

البؤرتان $f_1(2,0) \qquad f_2(-2,0)$

الراسان $v_1(a,0) \qquad v_2(-a,0)$

الراسان $v_1(\sqrt{13},0) \qquad v_2(-\sqrt{13},0)$

عندي مجال خل اطلع القطبان ولو ما مطلوبات.

القطبان $M_1(0,b) \qquad M_2(0,b)$

القطبان $M_1(0,3) \qquad M_2(0,-3)$

الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}} < 1$

ايجاد المعادلة المجهولة للقطع الناقص

❖ لازم نعرف موقع البؤرة على السينات لو الصادات. حتى نكتب المعادلة حسب نوعها. ونكدر نعرف من خلال: -

I. اذا منطي احداثي البؤرة $f(\mp c,0)$ لو $f(0,\mp c)$ نستفاد مرتين .مرة نطلع منها c ومرة نحدد موقع البؤرة.

II. اذا منطي احداثي الراس $V(\mp a,0)$ لو $v(0,\mp a)$ نستفاد مرتين .مرة نطلع منها a ومرة البؤرة تنتمي لنفس محور الراس .

III. اذا منطي احداثي القطب $M(\mp b,0)$ لو $M(0,\mp b)$ نستفاد مرتين .مرة نطلع منها b ومرة تنتمي البؤرة عكس محور القطب.

IV. إذا حدد بالسؤال موقع البؤرة فيعني مسوي فضل علينا.

❖ إذا ما كدرنا نحدد موقع البؤرة حسب الحالات الأربعة نحل حل طبيعي وبنهاية الحل ناخذ احتمالين تاخذ مرة لمحور السينات ومرة لمحور الصادات.

❖ حتى توجد المعادلة لازم تطلع b^2 , a^2 واغلب الاسئلة ينطيك واحد وينطي معلومة عن C فتروح تطلع C ونربط المعلومتين بقانون المنقذ دائما ونجد المجهول الثاني .ونكتب المعادلة .

لذلك راح اصيغ الأسئلة الوزارية ومالت الكتاب بحيث اضع خط أسفل كل معلومة ومع لون مختلف حتى تعرف شلون تميز بين المعلومتين وتحل الأسئلة. والفاصل بين المعلومتين دائما هو حرف ((و))

❖ دائما كل معلومة اذا طلعت منها قيمة (a^2,b^2,c^2) يعني ان المعلومة انتهت وننتقل الى المعلومة الثانية ثم نربط فيما بينهم عن طريق قانون المنقذ(ميسي).

❖ معلومات مفيدة للحل: -

- التسبة بين طولي محوريه تباوع وين الرقم الجبير اذا فوك نجعل النسبة $=\frac{2a}{2b}$ واذا جوى تقلب النسبة .

$$\frac{2a}{2b}=\frac{5}{4} \qquad\qquad \frac{2b}{2a}=\frac{4}{5}$$

- اذا انطاك الفرق بين طولي محوريه نجعل

$$2a-2b=\text{الفرق} \qquad\qquad a=\frac{\text{الفرق}}{2}+b \qquad (1)$$

واذا مجموع مكان الطرح نضع جمع

$$2a+2b=\text{المجموع} \qquad\qquad a=\frac{\text{المجموع}}{2}-b \qquad (2)$$

هاي المعلومتين نطلع منهم معادلة نعوضها بقانون ميسي.

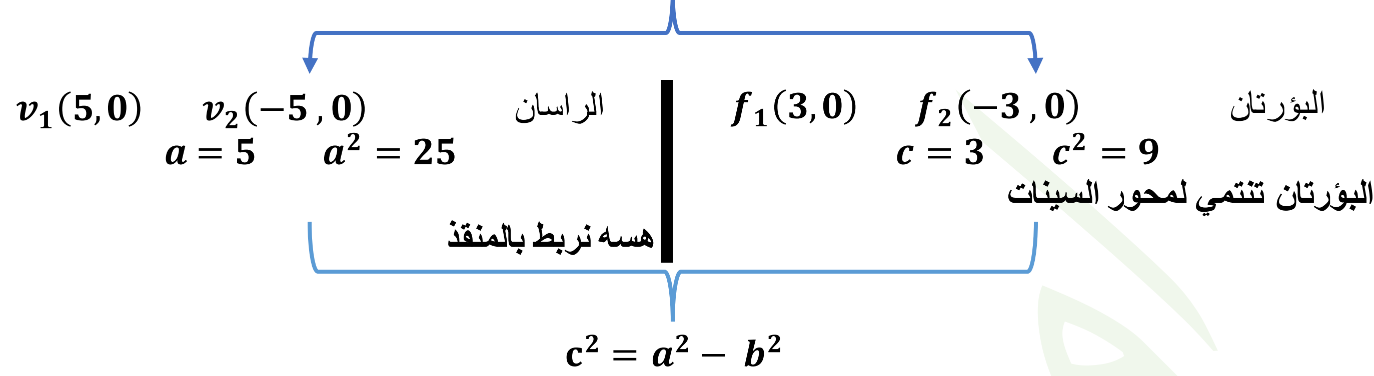
- اذا انطاك نقطة $p(x,y)$ او اكثر من نقطة بشرط ما متشابهات وكلك (يمر بها او يقطعها القطع او تنتمي او تقع على القطع).تكتب معادلة القطع الناقص وتعوض بيها كل النقاط .
- اذا اعطى الاختلاف المركزي نجد منه علاقة بين a,c ونربعها ونعوضها بقانون ميسي.
- اذا قطع القطع الناقص مقدار من محور السينات ومقدار من محور الصادات.

فالمقدار الكبير يمثل (2a) والمقدار الأقل يمثل (2b) والبؤرتان تقعان على نفس المحور الأكبر.

مثال: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والذي بؤرتاه $f_1(3,0)$ $f_2(-3,0)$ **و رأساه النقطتان** $v_1(5,0)$ $v_2(-5,0)$



من المعلومات المعطاة في السؤال



البؤرتان $f_1(3,0)$ $f_2(-3,0)$

$c=3$ $\quad c^2=9$

البؤرتان تنتمي لمحور السينات

الراسان $v_1(5,0)$ $v_2(-5,0)$

$a=5$ $\quad a^2=25$

هسه نربط بالمنقذ

$$c^2=a^2-b^2$$

$$9=25-b^2 \to\to b^2=25-9=16 \qquad b^2=16$$

نكتب المعادلة التي تنتمي للسينات ونعوض

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مثال: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل <u>يقطع من محور السينات جزء طوله 8 وحدة</u> **و** <u>ومن محور الصادات جزء طوله 12 وحدة طول .</u> **ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحته ومحيطه.**

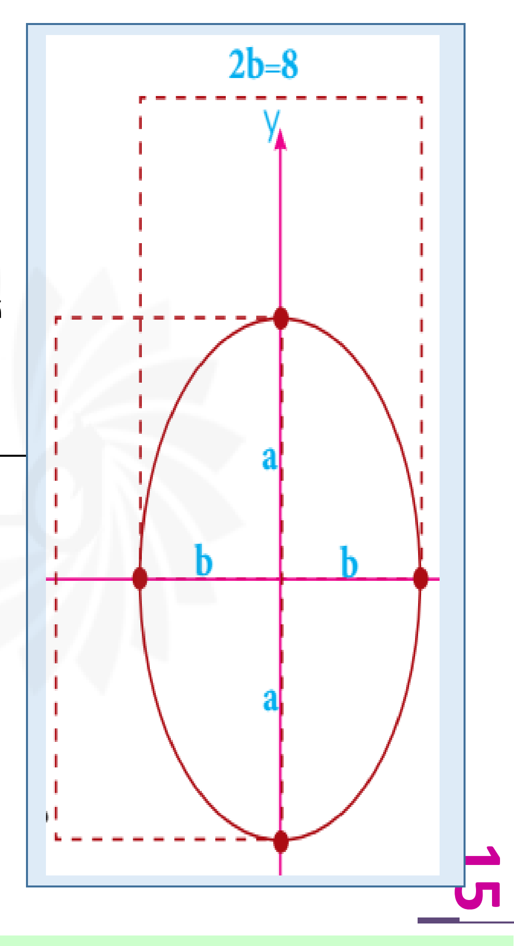
من معلومات السؤال

الجزء المقطوع من محور السينات يمثل طول المحور الصغير .

$2b=8 \quad b=4 \quad b^2=16$

الجزء المقطوع من محور الصادات يمثل طول المحور كبير .

$2a=12 \quad a=6 \quad a^2=36$



بما ان المحور الكبير على محور الصادات . يعني ان البؤرتان تنتمي لمحور الصادات ايضا .

نكتب المعادلة الصادية ونعوض بيها قيم a ,b

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1 \qquad\qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

مطلوب ايضا البعد بين البؤرتين والمساحة والمحيط. لازم نطلع c

$$c^2=a^2-b^2=36-16=20$$

$$C=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

البعد البؤري=البعد بين البؤرتين $\quad 2c=2.2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ وحدة طول

$$A=a\,.b\pi=6.4\pi=24\pi$$ وحدة مربعة

$$p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}=2\pi\sqrt{26}$$ وحدة طول

مثال: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه (6)وحدات والفرق بين طولي محوريه يساوي 2 وحدة.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

البؤرتان تنتميان للسينات

المعلومة الاولى:- البعد بين البؤرتين

$2c = 6 \quad c = 3 \quad c^2 = 9$

هسه نربط بالمنقذ بس نعوض المعادلة1 مكان a بالمنقذ

المعلومة الثانية: - الفرق بين المحورين

$2a - 2b = 2 \quad \div 2$

$a - b = 1 \quad a = 1 + b - - - - - - 1$

هسه نربط بالمنقذ

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$9 = (1+b)^2 - b^2 \rightarrow$ نفتح مربع حدانية $\rightarrow 9 = 1 + 2b + b^2 - b^2$

$9 - 1 = 2b \quad 2b = 8 \quad b = 4$ نعوض في معادلة1

$a = 1 + b = 1 + 4 = 5 \quad a^2 = 25 \quad b^2 = 16$

نكتب المعادلة التي تنتمي للسينات ونعوض $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

تمارين 2-2: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الأصل في الحالات التالية :-

A. البؤرتان هما$f_1(5,0) \ f_2(-5,0)$ وطول المحور الكبير يساوي 12 وحدة.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

البؤرتان $f_1(5,0) \quad f_2(-5,0)$

$c = 5 \quad c^2 = 25$

البؤرتان تنتمي للسينات

المعلومة الثانية: -طول المحور الكبير

$2a = 12 \quad a = 6 \quad a^2 = 36$

هسه نربط بالمنقذ

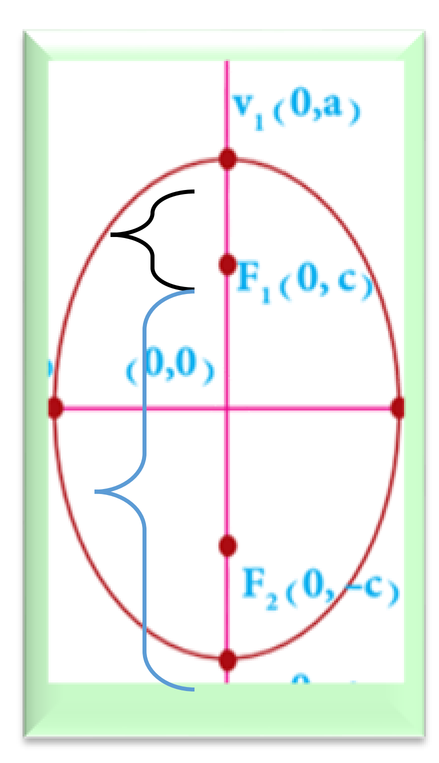
$$c^2 = a^2 - b^2$$

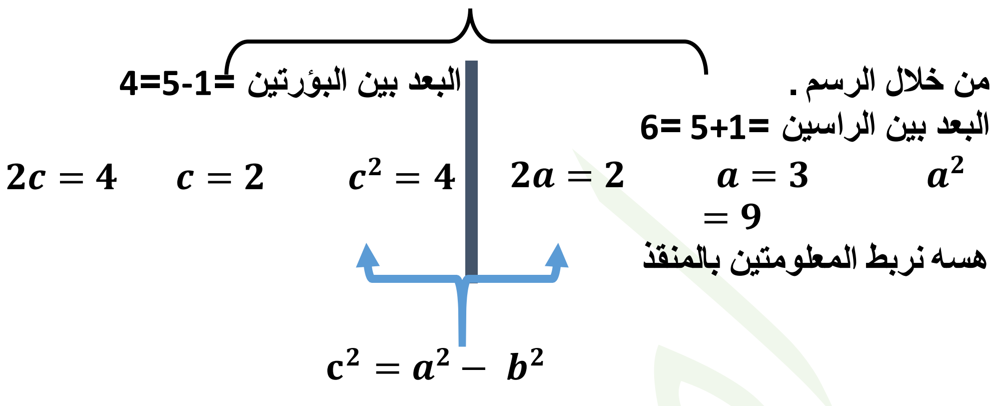
$25 = 36 - b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 36 - 25 = 11 \quad b^2 = 11$

نكتب المعادلة التي تنتمي للسينات ونعوض $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

B-احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5,1 على التوالي.

من معلومات السؤال





من خلال الرسم .

البعد بين الراسين =5+1 =6

البعد بين البؤرتين =5-1=4

$2a = 2 \quad a = 3 \quad a^2 = 9$

$2c = 4 \quad c = 2 \quad c^2 = 4$

هسه نربط المعلومتين بالمنقذ

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$4 = 9 - b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5 \qquad b^2 = 5$$

[وما دام ما عدنا بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد المن تنتمي البؤرة لازم نأخذ احتماليين للمعادلة مرة للسينات ومرة للصادات]

1-البؤرة تنتمي لمحور السينات $\quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2-البؤرة تنتمي لمحور الصادات $\quad \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

---

c- الاختلاف المركزي $=\frac{1}{2}$ وطول المحور الصغير يساوي 12 وحدة.

الحل :-

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى
الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} \qquad \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \qquad a = 2c$

$a^2 = 4c^2 - - - -1$

المعلومة الثانية: -طول المحور الصغير

$2b = 12 \qquad b = 6$

$b^2 = 36$

هسه نربط بالمنقذ ونعوض معادلة 1 بيه .

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 4c^2 - 36$$

$36 = 4c^2 - c^2 \rightarrow\rightarrow 3c^2 = 36 \qquad c^2 = \frac{36}{3} = 12$ نعوض

$a^2 = 4c^2 \rightarrow \quad a^2 = 4.12 = 48$

$a^2 = 48$ $b^2 = 36$

[وما دام ما عدنا بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد المن ينتمي القطع لازم نأخذ احتمالين للمعادلة مرة للسينات ومرة للصادات]

1-البؤرة تنتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2-البؤرة تنتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{48}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ملاحظة مهمة:- اذا القطع الناقص يتقاطع وي محور السينات نقطة التقاطع تصير (x ,0) واذا ويه الصادات النقطة هي (0, y) .

هاي النقاط لو تصير V لو M.

اذا البؤرة تنتمي لمحور ونقطة التقاطع لنفس المحور فنحولها الى V.

واذا البؤرة تنتمي لمحور وهي تنتمي لعكس المحور فهاي تصير M.

c- البؤرتان هما $(0,\pm 2)$ و يتقاطع مع محور السينات عند $X = \pm 4$.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى

البؤرتان $f_1(0,2)$ $f_2(0,-2)$

$c = 2$ $c^2 = 4$

البؤرتان تنتمي للصادات

المعلومة الثانية :- نقطة تقاطع القطع مع محور السينات هي $(\mp 4, 0)$ وهي تنتمي لمحور السينات .
لكن البؤرتان تنتمي للصادات. متعاكسان.
اذن نقطة التقاطع=قطب

القطبان $M_1(4,0)$ $M_2(-4,0)$

$b = 4$ $b^2 = 16$

هسه نربط بالمنقذ.

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$4 = a^2 - 16 \to\to a^2 = 16 + 4 = 20$

$a^2 = 20$ $b^2 = 16$

البؤرتان تنتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

c- المسافة بين بؤرتيه 8 وحدات و نصف محوره الصغير يساوي 3 وحدة.

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى
البعد بين البؤرتين

$$2c = 8 \qquad c = 4$$
$$c^2 = 16$$

المعلومة الثانية :-طول نصف المحور الصغير

$$\frac{1}{2}(2b) = 3 \qquad b = 3 \qquad b^2 = 9$$

هسه نربط بالمنقذ ونعوض معادلة 1 بيه .

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$16 = a^2 - 9 \rightarrow\rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$$

$$a^2 = 25 \qquad\qquad b^2 = 9$$

[وما دام ما عدنا بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد المن ينتمي القطع لازم نأخذ احتمالين للمعادلة مرة للسينات ومرة للصادات]

1-البؤرتان تقع على محور السينات $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2-البؤرتان على محور الصادات $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

كتاب:-جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين$(6,2)$ $(3,4)$

الحل:-بما ان البؤرتان تنتميان لمحور السينات.

ومنطي هنا نقطتين يمر بهما القطع يعني نعوضهن اثنينهن

معادلة القطع $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

النقطة (6,2) تنتمي للقطع الناقص. تحقق معادلته. $\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 - - - 1$

النقطة (3,4) تنتمي للقطع الناقص. تحقق معادلته. $\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 - - - -2$

هسه نساوي معاملات واحد من المجاهيل حتى نختصرهم بالحذف. نضرب المعادلة 2 ب (-4)

$$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 - - - 1$$

$$-\frac{36}{a^2} - \frac{64}{b^2} = -4 - - - -2$$

$-\frac{60}{b^2} = -3 \qquad -3b^2 = -60 \qquad b^2 = 20$

نعوض في معادلة 2 لان سهلة شوي.

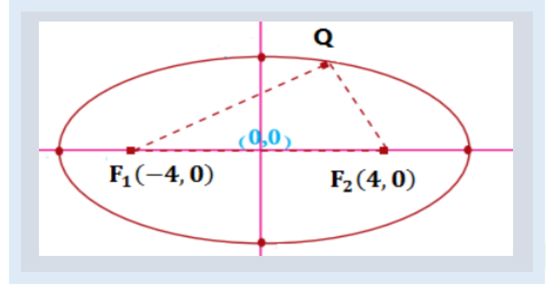
$\frac{9}{a^2} + \frac{16}{20} = 1 \qquad \frac{9}{a^2} + \frac{4}{5} = 1 \qquad \frac{9}{a^2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{5}$

$\frac{9}{a^2} = \frac{1}{5} \qquad a^2 = 45$

هسه نكتب المعادلة ونعوض. المعادلة تنتمي للسينات.

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

كتاب: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $f_1(4,0)f_2(-4,0)$ و النقطة Q تنتمي له بحيث ان محيط المثلث QF1F2 يساوي 24 وحدة.



من معلومات السؤال

المعلومة الاولى

البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

$c = 4 \qquad c^2 = 16$

البؤرتان تنتمي الى السينات

هسه نربط عن طريق المنقذ

المعلومة الثانية

محيط المثلث =مجموع اطوال اضلاعه الثلاثة.

$p = QF1 + QF2 + F1F2$

من تعريف القطع: -مجموع اي بعدين لنقطة Q عن بؤرتيه يساوي طول المحور الكبير. يعني.

$QF1 + QF2 = 2a$

وعدنا البعد بين البؤرتين **2C= F1F2**

نعوض بالمحيط.

$24 = 2a + 2c \qquad \div 2$

$12 = a + 4 \quad 12 = a + c$

$12 - 4 = a \qquad a = 8 \qquad a^2 = 64$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$a^2 = 64 \qquad b^2 = 48 \quad 16 = 64 - b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 64 - 16 = 48$

القطع الناقص بؤرته تنتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

اسئلة الربط بين القطع المكافيء والقطع الناقص

يجي السؤال بصيغة:-جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته او راسه او قطبه هي بؤرة القطع المكافيء.

V؟رأسه M؟ قطبه F؟بؤرته	نروح نطلع ← → نحول الى	من معادلة القطع المكافيء المعلومة نطلع بؤرة $f(\mp p,0)$ $f(0,\mp p)$

وينطيك طول محور كبير او صغير او اختلاف مركزي تستفاد منها تطلع معلومة لو معادلة ونربط هاي المعلومات بالمنقذ ونكتب المعادلة ونعوض.

كتاب: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافيء $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدة.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات الموجب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$

$4p = 12 \qquad p = 3$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب

$f(p,0) = f(3,0)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص.

البؤرتان $f_1(3,0) \qquad f_2(-3,0)$

$c = 3 \qquad c^2 = 9$

القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية: -طول المحور الصغير

$2b = 10$

$b = 5$

$b^2 = 25$

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$9 = a^2 - 25 \rightarrow\rightarrow a^2 = 25 + 9 = 34$$

$$a^2 = 34 \qquad b^2 = 16$$

البؤرة تنتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{16} = 1$

كتاب-وزاري: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافيء الذي معادلته $x^2 = 24y$ ومجموع طول محوريه يساوي 36 وحدة.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات الموجب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4py$

$4p = 24 \qquad p = 6$

بؤرة القطع المكافيء تنتمي لمحور الصادات الموجب

$f(0,p) = f(0,6)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص.

البؤرتان $f_1(0,6) \qquad f_2(0,-6)$

$c = 6 \qquad c^2 = 36$

البؤرتان تنتمي الى الصادات

المعلومة الثانية مجموع طولي محوريه

$2a + 2b = 36 \qquad \div 2$

$a + b = 18$

$a = 18 - b - - - - - - 1$

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ بس نعوض معادلة 1 بيه

$c^2 = a^2 - b^2$

$36 = (18-b)^2 - b^2$

$36 = 324 - 36b + b^2 - b^2$

$36 = 324 - 36b$

$36b = 324 - 36 \qquad b = \frac{288}{36} = 8$

$b = 8$

نعوض في معادلة 1 حتى نطلع قيمة a

$a = 18 - 8 = 10 \qquad a^2 = 100 \qquad b^2 = 64$

البؤرتان تنتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1 \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

كتاب-2018-د2: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافيء الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات السالب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص .

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$-4p = -8 \qquad p = 2$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات السالب

$f(-p,0) = f(-2,0)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص.

البؤرتان $f_1(2,0) \qquad f_2(-2,0)$

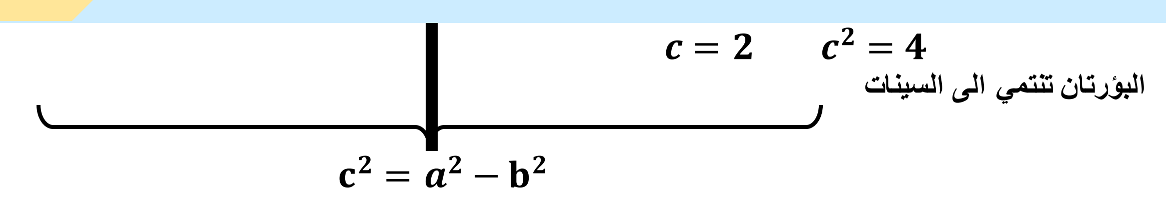
المعلومة الثانية :- $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ يمر بها القطع الناقص تحقق معادلته .

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$

$\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 - - - - - - - 1$

نربط بالمنقذ ونعوض معادلة المنقذ بهاي المعادلة1 لان معادلة المنقذ اسهل من هاي المعادلة .



$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = a^2 - b^2 \rightarrow\rightarrow a^2 = 4 + b^2 ----2$

نعوض معادلة 2 في معادلة 1

$\frac{12}{4+b^2} + \frac{3}{b^2} = 1$ ثم نوحد مقامات

$\frac{12b^2 + 3b^2 + 12}{(4+b^2)b^2} = 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{15b^2 + 12}{(4b^2 + b^4)} = 1$

$b^4 + 4b^2 = 15b^2 + 12$ نصفرها $b^4 + 4b^2 - 15b^2 - 12 = 0$

$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$ $b^4 - 11b^2 - 12 = 0$ تجربة

اما $b^2 + 1 = 0 \quad \notin R$ يهمل

او $b^2 - 12 = 0 \quad b^2 = 12$

نعوض في معادلة 2لان أسهل. $a^2 = 4 + 12 = 16$

$a^2 = 16 \qquad b^2 = 12$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ملاحظة مهمة في كل الرياضيات: -اي منحني يتقاطع مع المحاور الاحداثية شنسوي؟
- إذا مع السينات نجعل y=0 ونعوضها ونجد قيمة x وتصير النقطة (x,0).
- إذا مع الصادات نجعل x=0 ونعوضها ونجد قيمة y وتصير النقطة (0,y).
- هاي النقاط تتحول الى بؤرة او راس او قطب حسب الي يحدده هو بالسؤال .

ملاحظة: -إذا مس قطع ناقص دليل قطع مكافئ شنسوي؟
- من المكافيء نطلع p
- نجد الدليل $y = \mp p$ او $x = \mp p$
- نحول الدليل الى نقطة تماس(0,y) لو (x,0)
- نقطة التماس لو تصير راس اذا نفس محور بؤرتا الناقص لو قطب اذا تخالف بؤرتاه.

تمارين 2-2-وزاري: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافيء $y^2 = 12x$.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -نجد نقاط التقاطع للمنحني مع محور ونعوض بمعادلة المنحني x=0الصادات يعني نجعل

$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16$

$y^2 = 16 \quad \sqrt{\text{للطرفين}}$

المعلومة الثانية: -القطع المكافيء الذي تنتمي بؤرته لمحور السينات الموجب نجد p .

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$

$--------$

$y = \mp 4$

نقاط التقاطع للمنحني مع محور الصادات هي

$(0, \mp 4)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص.

البؤرتان $f_1(0,4) \quad f_2(0,-4)$

$c = 4 \quad c^2 = 16$

البؤرتان تنتمي الى الصادات

$4p = 12 \quad p = 3$

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب (عكس البؤرة دوما)

$x = -p \quad x = -3$

اذن نقطة التماس بين دليل القطع المكافيء والقطع الناقص

$(-3,0)$

نقطة التماس تنتمي لمحور السينات والبؤرة الناقص تنتمي لمحور الصادات (متعاكسات) اذن هي قطب.

القطبان $M_1(3,0) \quad M_2(-3,0)$

$b = 3 \quad b^2 = 9$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$a^2 = 25 \quad b^2 = 9$

$16 = a^2 - 9 \rightarrow\rightarrow a^2 = 9 + 16 = 25$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ملاحظة: -اذا قطعين تقاطعا ومنطيك احداثي سيني او صادي من نقطة التقاطع فقط.

- تعوض هذا الاحداثي بالمعادلة مالت القطع المعلوم –القطع المكافيء -وتطلع الاحداثي الثاني.
- وتصير عندك نقطة (x ,y). هاي النقطة تنتمي للقطع المجهول همينا .
- يعني تروح تعوضها بمعادلة القطع المجهول-القطع الناقص- حتى لو تطلع بيها مجهول او معادلة.

تمارين 2-2-وزاري: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان الى محور السينات وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافيء $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي الاحداثي السيني لها يساوي (-2)

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -بؤرتا الناقص تنتمي لمحور السينات (منطيها بالسؤال)
وطول المحور الكبير =ضعف طول المحور الصغير.

$2a = 2(2b) \quad 2a = 4b \quad a = 2b$

$a^2 = 4b^2 - - - -1$

المعلومة الثانية: -حسب الملاحظة الفوك
نعوض قيمة x=-2 في معادلة القطع المكافيء حتى نطلع الاحداثي الصادي وتصير نقطة كاملة.

$y^2 = -8x \quad x = -2$

$y^2 = 16 \quad \sqrt{\text{للطرفين}}$

$y = \mp 4$

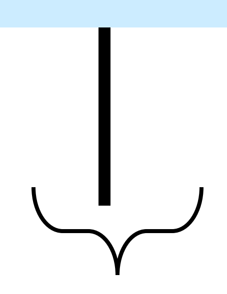
نقاط التقاطع القطع المكافيء مع الناقص

$(-2,4) \quad (-2-,4)$

والنقطة $(-2,4)$ تنتمي لمعادلة القطع الناقص .نعوضها فيه .

بما ان بؤرتا القطع الناقص تنتمي لمحور السينات اذن معادلته.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1----2$$



نعوض معادلة 1 في 2

$$\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \qquad \frac{17}{b^2}=1 \qquad b^2=17$$

نعوض في معادلة 1.

$$a^2=4.17=68 \qquad a^2=68 \qquad b^2=17$$

بما ان القطع الناقص سيني البؤرة. $\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

تمارين عامة : -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومساحته 7π و محيطه 10π

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -القطع الناقص سيني البؤرة (منطيها بالسؤال) من المساحة

$$A=a.b\pi$$
$$7\pi=a.b\pi \qquad \div\pi$$
$$a.b=7 \qquad \text{بالتربيع}$$
$$a^2=\frac{49}{b^2} \qquad 1$$

المعلومة الثانية: -من المحيط

$$p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$
$$10\pi=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad \div 2\pi \qquad \text{بالتربيع ثم}$$
$$25=\frac{a^2+b^2}{2} \qquad \times 2$$
$$50=a^2+b^2---2$$

نعوض معادلة 1 في 2

$$50=\frac{49}{b^2}+b^2 \qquad \times b^2$$
$$50b^2=49+b^4$$
$$b^4-50b^2+49=0$$
$$(b^2-49)(b^2-1)=0$$

اما $b^2-49=0 \qquad b^2=49$

نعوض في معادلة 1حتى نطلع قيمة a $\quad a^2=\frac{49}{49}=1$

يهمل الحل اعلاه. لان b طلعت أكبر من a ولا يجوز في القطع الناقص. لان a هو الاكبر.

او $b^2 - 1 = 0 \quad b^2 = 1$

نعوض في معادلة 2 لان اسهل $b^2 = 1 \quad a^2 = 49 \quad a^2 = \frac{49}{1} = 49$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2015د1:-النقطة $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ تنتمي للقطع المكافيء الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل و النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافيء والناقص .

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -القطع المكافيء سيني البؤرة (موجب او سالب ما ندري) نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

لكن النقطة $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ تقع في الربع الاول والمكافئ يمر بها.

اذن القطع المكافيء سيني البؤرة موجب

$y^2 = 4px$

$2^2 = 4p \cdot \frac{1}{3} \qquad 4 = 4\frac{p}{3} \qquad 1 = \frac{p}{3}$

$p = 3$

نرجع نطلع معادلة القطع المكافيء لان مطلوبة همينا

$y^2 = 4px \qquad y^2 = 4.3x$

$y^2 = 12x$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب

$f(p, 0) = f(3.0)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص.

البؤرتان $f_2(-3,0) \quad f_1(3,0)$

$c^2 = 9 \quad c = 3$

البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية النسبة بين طولي محوريه نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي a حسب الرقم الجبير.

$\frac{a}{b} = \frac{5}{4} \qquad \frac{2a}{2b} = \frac{5}{4}$

$a^2 = \frac{25}{16} b^2 ----1 \qquad a = \frac{5}{4} b$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = \frac{25}{16} b^2 - b^2$ توحيد بالمقص

$9 = \frac{25b^2 - 16b^2}{16} = \frac{9b^2}{16}$

$9 = \frac{9b^2}{16} \to\to 1 = \frac{b^2}{16}$

$b^2 = 16$

نعوض في معادلة واحد حتى نطلع قيمة a.

$a^2 = \frac{25}{16} . 16 = 25$

القطع الناقص سيني البؤرة $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ملاحظة مهمة

- اذا مر قطع ناقص بنقطة واحد من احداثياتها=صفر مثلا (0,y)(x,0)
- او مر ببؤرة $f(x,0)f(0,y)$ لقطع اخر نجدها-اقصد بؤرة القطع الاخر- ثم نحول هاي البؤرة الى

اذا تنتمي نفس بؤرتا الناقص فهي راس V واذا تخالفهما في قطب M

- اذا ما عندي بؤرة احدد عليها نوع النقطة الي مار بيها القطع الناقص نفرض النقطة مثلا تمثل قطب او راس
- ونجد منها قيم a وb وإذا طلعت b اكبر من a فالفرضية غلط ونمسح الحل ونعكس الفرضية.

2010د1:-جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويمر ببؤرة القطع المكافيء $y^2-16x=0$ ومساحة منقطته 20π وحدة مساحة .

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-القطع المكافئ سيني موجب نجد بؤرته ونحولها لو راس لو قطب للقطع الناقص.

$y^2=16x$

$y^2=4px$

$------4p=16 \qquad p=4$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب $f(p,0)=f(4,0)$

نفرض بؤرة القطع المكافيء تمثل قطب القطع الناقص.

القطبان $M_1(4,0) \quad M_2(-4,0)$

$b=4 \qquad b^2=16$

اذن البؤرتان تنتمي لمحور الصادات لان القطبان ينتميان الى السينات

المعلومة الثانية: -مساحة القطع الناقص

$A=a.b\pi$

$20\pi=a.4\pi \qquad \div 4\pi$

$a=5 \qquad a^2=25$

طلعت a أكبر من b يعني الفرض مالتي صحيح. ولو طالعة a اقل من b اقلب الفرضية وامسح الحل واحل من جديد وافرض البؤرة تمثل راس ويكون الجواب صحيح.

القطع الناقص صادي البؤرة $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ $\qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

2012-خارج العراق: -جد معادلة القطع الناقص الذي رأساه $(\pm5,0)$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافيء المار دليله بالنقطة $(-3,4)$.جد معادلة كل من القطعين المكافيء والناقص .

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -

من الراسان فان القطع الناقص سيني البؤرة.

$v_1(5,0) \quad , \quad v_2(-5,0)$

$a=5 \qquad a^2=25$

تحليل - تحليل - بما ان بؤرة القطع الناقص=بؤرة المكافئ.

اذن بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات الدليل يأخذ قيمة x من النقطة.

المعلومة الثانية: - دليل القطع المكافيء هو

$x=-3$

P=3

الدليل ينتمي لمحور السينات السالب

اذن بؤرة القطع المكافئ تنتمي للسينات الموجب

$y^2=4px$

$y^2=4.3x \rightarrow y^2=12x$

بؤرة القطع المكافئ $f(+p,0) \to$
$f(3.0)$
هسه نروح معادلة القطع الناقص: -
بؤرتا القطع الناقص =بؤرة القطع المكافيء
$f_1(3,0)$, $f2(-3,0)$
$c = 3$ $c^2 = 9$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$9 = 25 - b^2 \to\to b^2 = 25 - 9 = 16$ $a^2 = 25$ $b^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ملاحظة مهمة

- القطع الناقص يقطع من السينات ومن الصادات والجزء المقطوع الأكبر يمثل طول محور كبير والاقل طول محور صغير. والبؤرتان تنتمي للمسافة الأكبر.
- لكن إذا منطيك يقطع من محور معين فقط وما منطيك شكد يقطع من الاخر. هنا عندك مشكلة.
- تفرض الجزء المقطوع يمثل محور كبير او صغير وتحل السؤال
- ونجد قيم bوa وإذا طلعت b أكبر من a فالفرضية غلط ونمسح الحل ونعكس الفرضية.

2012: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل و الذي يقطع من محور السينات جزء طوله 8وحدات ومساحته 24π وحدة مساحة.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-نفرض ان الجزء المقطوع من محور السينات يمثل محور صغير

$2b = 8$
$b = 4$
$b^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور الصادات لان المحور الصغير ينتمي الى السينات
وهذا يعني ان الكبير على الصادات .

المعلومة الثانية: -مساحة القطع الناقص

$A = a\,.b\pi$

$24\pi = a.\,4\pi$ $\div\, 4\pi$

$a = 6$ $a^2 = 36$

توضيح لا يكتب بالورقة: -طلعت a أكبر من b يعني الفرض مالتي صحيح. ولو طالعة a اقل من b اقلب الفرضية وامسح الحل واحل من جديد و افرض الجزء المقطوع محور جبير ويكون الجواب صحيح .

البؤرتان تنتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

2014-د4-انبار: -اذا كانت $e+di=\frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته $(0,d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e+id\|$

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -لازم نبسط المقدار ونطلع d وهاي نعوضها بالبؤرة وتصير بؤرة قطع ناقص.

$$e+di=\frac{4+2i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}$$

$$e+di=\frac{4+4i+2i+2i^2}{1+1}==\frac{4+6i-2}{2}$$

$$e+di=\frac{2+6i}{2}=1+3i$$

$$e+di=1+3i$$

ومن تساوي عددين مركبين

$$e=1 \qquad d=3$$

بؤرتا القطع الناقص

$$f_1(0,3)\ ,\qquad f2(0,-3)$$

$$c=3 \qquad c^2=9$$

المعلومة الثانية: -طول المحور الكبير

$$2\|e+id\|=2\|z\|=2r$$

يعني قصده انو طول المحور الكبير =ضعف المقياس للعدد المركب .لذلك لازم نطلع المقياس .

$$r=\sqrt{e^2+d^2}=$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

طول المحور الكبير

$$2a=2r=2\sqrt{10}$$

$$a=\sqrt{10} \qquad a^2=10$$

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ

$$c^2=a^2-b^2$$

$$b^2=1\ \ 9=10-b^2 \qquad b^2=10-9=1$$

البؤرتان على محور الصادات $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{10}=1$ $\qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

2015-د2: -جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور الصادات ومساحته 32π وحدة مساحة والنسبة بين طول محوريه $\frac{1}{2}$

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -من مساحة القطع الناقص.

$$A=a\,.b\pi$$

$$32\pi=a.b\pi \qquad \div\pi$$

$$32=a\,.b\,------1$$

البؤرتان تنتمي الى الصادات حسب منطوق السؤال .

المعلومة الثانية النسبة بين طولي محوريه نشوف الرقم الاكبر فوك لو جوه ونخلي a حسب الرقم الجبير.

$$\frac{2b}{2a}=\frac{1}{2} \qquad \frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

$$a=2b \qquad ----2$$

نعوض معادلة 2 في معادلة 1 .

$b = 4$ $b^2 = 16$ $2b^2 = 32$ $2b.b = 32$ $a.b = 32$

$a^2 = 64$ $a = 8$ $a.4 = 32$

البؤرتان نتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

2016-د2: -جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساويا لبعد بؤرة القطع المكافيء $y^2 + 24x = 0$ ومساحته 80π وحدة مساحة

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :- بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله= 2p
القطع المكافيء بؤرته تنتمي لمحور السينات السالب.
نروح نطلع p

$y^2 = -24x$
$y^2 = -4px$
$-4p = -24$ $p = 6$

بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله $= 2p = 2.6$
بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله= 12
{يكول بالسؤال. البعد بين البؤرتين =بعد بؤرة القطع المكافيء عن دليله}

$c^2 = 16$ $c = 6$ $2c = 12$

المعلومة الثانية: -مساحة القطع الناقص

$A = a.b\pi$

$80\pi = a.b\pi$ $\div \pi$

$80 = a.b$

$a = \frac{80}{b}$

$a^2 = \frac{6400}{b^2}$ $----1$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$16 = \frac{6400}{b^2} - b^2$ $] \times b^2$ $\rightarrow\rightarrow 16b^2 = 6400 - b^4$ نصفرها

$b^4 - 16b^2 - 6400 = 0$ نصفرها $(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0$

اما $b^2 + 100 = 0$ $\in C$ يهمل

او $b^2 - 64 = 0$ $b^2 = 64$

نعوض في معادلة 2 لان أسهل. $a^2 = \frac{6400}{64} = 100$

$a^2 = 100$ $b^2 = 64$

ما دام ما عندي بؤرة ولا راس ولا قطب ولا محدد بالسؤال المن البؤرتان لذلك ناخذ احتمالين.

1-البؤرة تنتمي لمحور الصادات $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

2-البؤرة تنتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

إيجاد قيم المجاهيل h,k

A-مجهول واحد بس h او k

- ✓ راح ينطيك معلومة وحدة والاغلب ينطيك البؤرة. نجد منها c.
- ✓ نحدد لمن تنتمي البؤرتان
- ✓ نجعل المعادلة الي بيها h قياسية بجعل المعادلة=1 والمعاملات=1 ونطلع منها قيم a ,b بالمقارنة مع المعادلة القياسية.
- ✓ نطبق قانون المنقذ ونجد المجهول.

B-اذا مجهولين h و k

- ➢ اترك المعادلة الي بيها مجاهيل لا تباوع عليها أصلا.
- ➢ راح ينطيك معلومتين لازم نطلع منهن (a^2, b^2) وما نتوقف لما نلكاهن ونستخدم قانون المنقذ يفيدنا.
- ➢ نحدد لمن ينتمي القطع من البؤرة او من معلومات السؤال.
- ➢ نجعل المعادلة الي بيها h, k قياسية بجعل المعادلة=1 والمعاملات=1 ونطلع قيم a, b من المعادلة بس بيهن مجاهيل h, k .
- ➢ نساوي قيم a,b ونجد المجاهيل

2015-مثال: -لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه $f(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $k\in R$

الحالة الاولى

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

1 – البؤرتان $f_1(\sqrt{3},0)$ $f_2(-\sqrt{3},0)$

$c=\sqrt{3}$ $c^2=3$

2- البؤرتان ينتميان الى السينات

3-نجعل المعادلة قياسية

$kx^2+4y^2=36$ $\div 36$

$\frac{kx^2}{36}+\frac{4x^2}{36}=1$

$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$

صارت معادلة قياسية

مادام المعادلة تنتمي لمحور السينات نقارنها مع القياسية ونطلع قيم a, b نحولها للجهة الثانية .

$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2=\frac{36}{k}$ $b^2=9$

$c^2=a^2-b^2$

$3=\frac{36}{k}-9 \rightarrow 3+9=\frac{36}{k} \rightarrow 12=\frac{36}{k}$ $k=\frac{36}{12}$ $K=3$

2017-د1-د2:- لتكن $hx^2 + ky^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل مجموع مربعي طولي محوريه 60 وحدة واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافيء $y^2 = 4\sqrt{3}x$ جد قيمة $k,h \in R$

هذا السؤال راح نحله بخطوات الحالة الثانية

الحل:- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء سيني البؤرة الموجب نجد بؤرته ونحولها الى بؤرة للقطع الناقص.

$y^2 = 4\sqrt{3}x$

$y^2 = 4px$

$4p = 4\sqrt{3} \qquad p = \sqrt{3}$

بؤرة القطع المكافيء $f(p,0) = f(\sqrt{3},0)$ هي تمثل بؤرة القطع الناقص.

البؤرتان $f_1(\sqrt{3},0) \qquad f_2(-\sqrt{3},0)$

$c = \sqrt{3} \qquad c^2 = 3$

البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية مجموع مربعي طولي محوريه

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$

$4a^2 + 4b^2 = 60 \qquad \div 4$

$a^2 + b^2 = 15 ------1$

هسه نربط عن طريق المنقذ

$c^2 = a^2 - b^2$

$3 = a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = 3 -----2$

من معادلة 1 ومعادلة 2 بالحذف لان اثنينهم درجة ثانية.

$a^2 + b^2 = 15$

$a^2 - b^2 = 3$

$2a^2 = 18 \qquad a^2 = 9$

نعوض في معادلة 1 حتى نطلع b

$9 + b^2 = 15 \qquad b^2 = 15 - 9 = 6$

$a^2 = 9 \qquad b^2 = 6$

هسه نسوي المعادلة قياسية

$hx^2 + ky^2 = 36 \qquad \div 36$

$$\frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$$

بما ان البؤرتان تنتمي للسينات

$$a^2 = \frac{36}{h} \qquad 9 = \frac{36}{h} \qquad h = \frac{36}{9} = 4$$

$$b^2 = \frac{36}{k}$$

$$6 = \frac{36}{k}$$

$$k = \frac{36}{6} = 6$$

2008-د1-:-لتكن $4x^2+2y^2=k$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل البعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة $k \in R$

1-من معلومة البعد بين بؤرتيه

$$2c=2\sqrt{3} \qquad c=\sqrt{3} \qquad c^2=3$$

2-ما منطيني البؤرتان لذلك ما اعرف المن ينتمي.

3-هسه نسوي المعادلة قياسية

$$x^2+y^2=36 \qquad \div k.$$

$$\frac{4x^2}{k}+\frac{2y^2}{k}=1 \qquad \frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{\frac{k}{2}}=1$$

حتى اعرف لمن ينتمي القطع الناقص لازم نعرف المقام الاكبر. ومادام نفس المقدار جوى x وجوى y نكدر نعرف المقام الاكبر. اكو قاعدة بالرياضيات كلما اكبر المقام قل الرقم يعني

$$\frac{k}{2}>\frac{k}{4}$$

اذن معناها المقام الاكبر جوى y ويعني القطع ينتمي للصادات.

$$\frac{x^2}{\frac{k}{4}}+\frac{y^2}{\frac{k}{2}}=1$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad a^2=\frac{k}{2} \qquad b^2=\frac{k}{4}$$

هسه بالمنقذ

$$c^2=a^2-b^2$$

$$3=\frac{k}{2}-\frac{k}{4} \rightarrow 3=\frac{4k-2k}{8} \rightarrow 3=\frac{2k}{8} \rightarrow 3=\frac{k}{4} \qquad k=12$$

وشكرا للناصرية

" لا توقف الكراهية الكراهية، بل يوقفها الحب فقط، هذه هي القاعدة الخالدة. "بوذا

"كل ما هو عظيم وملهم صنعه إنسان عَمِلَ بحرية." — ألبرت أينشتاين

"العقليات العظيمة تناقش الأفكار، وتلك العادية تناقش الأحداث، أما الصغيرة فتناقش الأشخاص." — إلينور روزفلت

"لدى الأشخاص الجادين أفكار قليلة، أما ذوي الأفكار فلا يكونون جادون أبدا." — بول فاليري

2010-د2-:- لتكن $ky^2 + 3x^2 = z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع محور الصادات علما ان مساحته $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد قيمة $k, z \in R$

هذا السؤال راح نحله بخطوات الحالة الثانية

الحل: -

1- بؤرتا ق ن تنتمي لمحور السينات.

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: - القطع الناقص يمر بنقطة تقاطع المستقيم.

نجد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات.

نجعل x=0

$2(0) + y = \sqrt{3} \quad \rightarrow y = \sqrt{3}$

نقطة التقاطع المستقيم مع محور الصادات هي

$(0, \sqrt{3})$

بما ان البؤرتان تنتمي لمحور السينات والنقطة تنتمي لمحور الصادات (متعاكسات) اذن هي قطب. قطبا القطع الناقص.

القطبان $M_1(0, \sqrt{3}) \quad M_2(0, -\sqrt{3})$

$b = \sqrt{3} \quad b^2 = 3$

المعلومة الثانية: -مساحة القطع الناقص

$A = a . b\pi$

$2\sqrt{3}\pi = a . \sqrt{3}\pi \qquad \div \sqrt{3}\pi$

$a = 2 \qquad a^2 = 4$

$b^2 = 3 \qquad a^2 = 4$

هسه نساوي المعادلة قياسية

$3x^2 + ky^2 = z \qquad \div z .$

بما ان البؤرتان تنتمي للسينات

$\frac{3x^2}{z} + \frac{ky^2}{z} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{z}{k}} = 1$

$a^2 = \frac{z}{3}$ نعوض $4 = \frac{z}{3} \qquad z = 4.3 = 12$

$b^2 = \frac{z}{k}$

$3 = \frac{12}{k} \qquad k = \frac{12}{3} = 4$

ما نحن عليه هو نتائج ما كنا نفكر به، العقل هو كل شيء وما نفكر به سنصبح عليه. جوتاما بوذا

ايجاد معادلة القطع الناقص من التعريف

- تطلع البؤرتان او هو ينطيكياها.
- نطلع طول المحور الكبير=2a او ينطيه بالسؤال.
- نفرض نقطة $p(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص . 4-نكتب قانون تعريف القطع الناقص $pf1 + pf2 = 2a$
- نطبق قانون البعد بين نقطتين بين $pf1$ وثم بين $pf2$ ثم نعوض بالقانون ونبسط ونجد الناتج

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + (y \pm c)^2} + \sqrt{(x \mp c)^2 + (y \mp c)^2} = 2a$$

2018-د1-احيائي: -جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الكبير 12cm واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافيء $x^2 = 12y$ باستخدام التعريف.

المعلومة الاولى :-من معادلة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور الصادات الموجب نجد بؤرته ونحولها الى الناقص

$x^2 = 12y$

$x^2 = 4py$

— — — — — — — —

$4p = 12 \qquad p = 3$

بؤرة القطع المكافيء الذي ينتمي لمحور السينات الموجب

$f(p,0) = f(0,3)$

هي نفسها بؤرة القطع الناقص البؤرتان $f_2(0,-3) \quad f_1(0,3)$

نفرض p(x ,y) تنتمي للقطع الناقص . ومن تعريف القطع الناقص $pf1 + pf2 = 2a$
ومن قانون البعد بين نقطتين

$$\overbrace{\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2}}^{pf1} + \overbrace{\sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2}}^{pf2} = \overbrace{12}^{2a}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 12$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 12 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$ بالتربيع

$$x^2 + (y-3)^2 = \overbrace{\left[12 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right]^2}^{\text{مربع حدانية}}$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 144 - 24\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

نختصر المتشابهات بين الطرفين ونفتح الاقواس وننقل كل المقادير ونترك الجذر وحده

$$y^2 - 6y + 9 - y^2 - 6y - 9 - 144 = -24\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$-12y - 144 = -24\sqrt{x^2 + (y+3)^2} \quad \div -12$$

$y+12=2\sqrt{x^2+(y+3)^2}$ بالتربيع

$y^2+24y+144=4[x^2+(y+3)^2] \quad \rightarrow y^2+24y+144=4x^2+4[y^2+6y+9]$

$y^2+24y+144=4x^2+4y^2+24y+36 \qquad 4x^2+4y^2-y^2=144-36$

$4x^2+3y^2=108 \quad \div 108 \qquad \frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$

كتاب-تمارين2-2:-باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات والعدد الثابت=10 والبعد بين بؤرتيه 6 وحدة ومركزه نقطة الأصل.

الحل: - نطلع البؤرتين. من معلومة المسافة بين البؤرتين $2c=6 \qquad c=3$

البؤرتان تنتمي للسينات. $f1(3,0) \quad f2(-3,0)$

طول المحور الكبير=العدد الثابت=2a=10 معطى في السؤال.

نفرض p(x ,y) تنتمي للقطع الناقص . ومن تعريف القطع الناقص $pf1+pf2=2a$ **ومن قانون البعد بين نقطتين**

$$\overbrace{\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}}^{pf1}+\overbrace{\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}}^{pf2}=\overbrace{10}^{2a}$$

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+y^2} \qquad \text{بالتربيع}$$

$$(x-3)^2+y^2=100-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}+(x+3)^2+y^2$$

$$x^2-6x+9+y^2=100-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}+x^2+6x+9+y^2 \qquad \text{بالاختصار}$$

$$-6x=100-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}+6x$$

$$20\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12x+100 \qquad \div 4$$

$$5\sqrt{(x+3)^2+y^2}=3x+25 \qquad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$25[(x+3)^2+y^2]=9x^2+150x+625$$

$$25[x^2+6x+9+y^2]=9x^2+150x+625$$

$$25x^2+150x+225+25y^2=9x^2+150x+625$$

نجعل الثوابت=المتغيرات

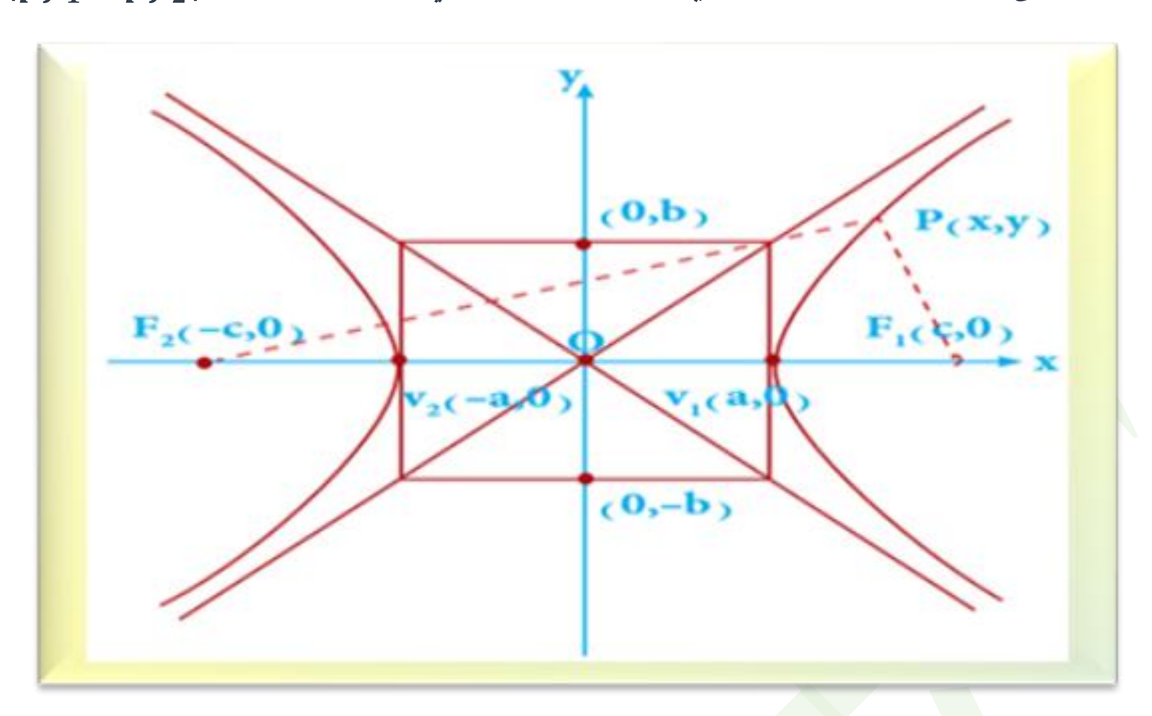
$$25x^2-9x^2+25y^2=625-225$$

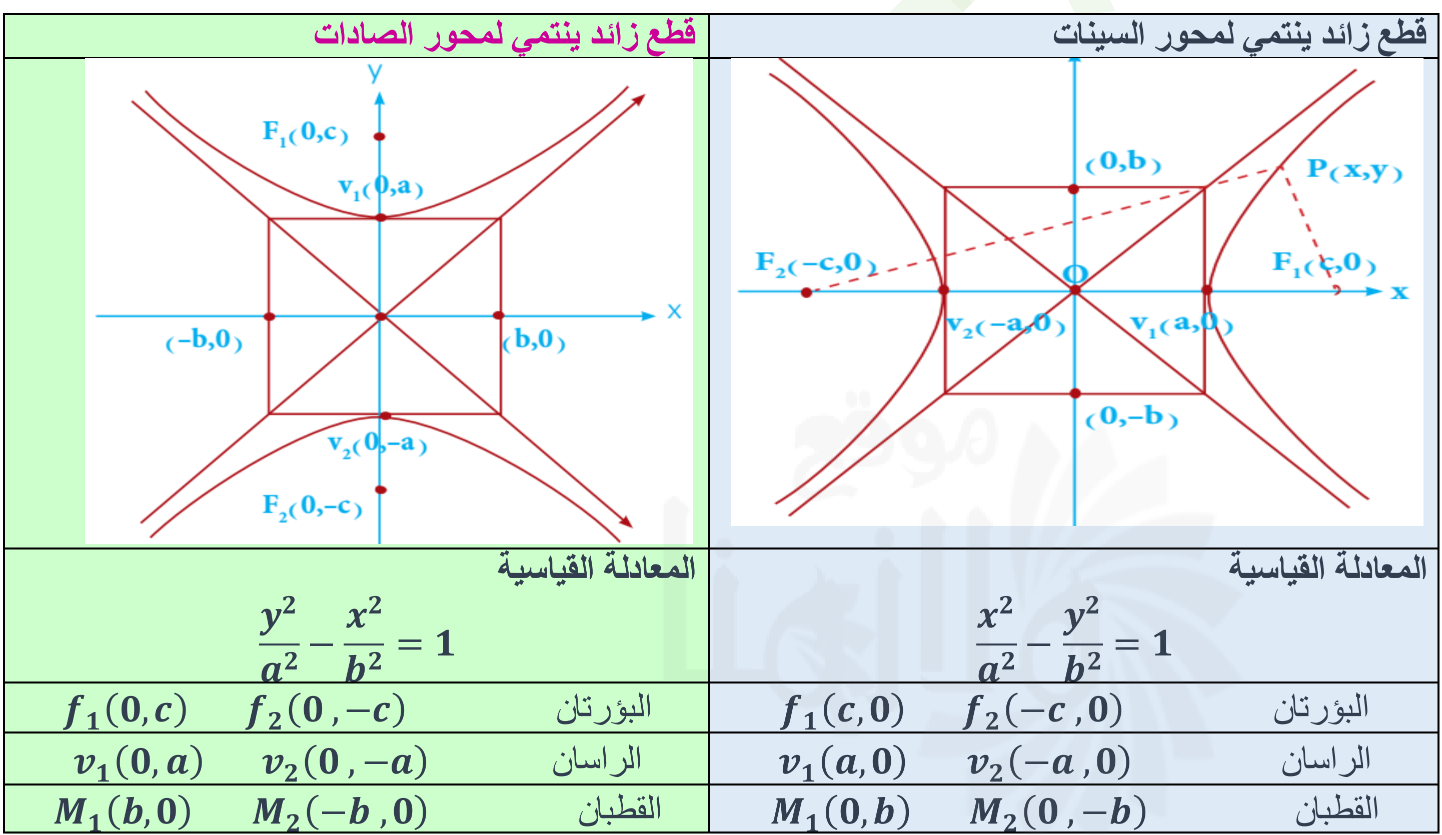
$$16x^2+25y^2=400 \qquad \div 400$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

القطع الزائد

تعريف القطع الزائد: - مجموعة نقاط في المستوي والتي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي اية نقطة واقعة عليه عن نقطتين ثابتتين فيه تسمى البؤرتان قيمة ثابتة تساوي طول المحور الحقيقي فيه. $|pf_1 - pf_2| = 2a$





قطع زائد ينتمي لمحور السينات		قطع زائد ينتمي لمحور الصادات	
المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		المعادلة القياسية $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	
البؤرتان	$f_1(c,0) \quad f_2(-c\,,0)$	البؤرتان	$f_1(0,c) \quad f_2(0\,,-c)$
الراسان	$v_1(a,0) \quad v_2(-a\,,0)$	الراسان	$v_1(0,a) \quad v_2(0\,,-a)$
القطبان	$M_1(0,b) \quad M_2(0\,,-b)$	القطبان	$M_1(b,0) \quad M_2(-b\,,0)$

يستطيع أي احمق ان يجعل الأشياء تبدو اعقد واكبر , لكنك تحتاج الى عبقري شجاع ليجعلها تبدو اسهل وابسط.

ملاحظات مهمة

- نحدد لمن ينتمي القطع اذا كانت المعادلة معلومة من خلال الحد الموجب وليس المقام الأكبر. ودائما الي جوى الحد الموجب قيمة a .
- طول المحاور والبعد البؤري نفسها كما في القطع الناقص. لكن هنا المحور الكبير يتحول اسمه الى طول المحور الحقيقي او الأساسي. وطول المحور الصغير يصبح طول المحور المرافق او التخيلي.
- في القطع الزائد ماكو اقطاب ولا يوجد طول محور صغير وانما الي موجود هو قطب ومحور تخيليات.
- اذا قطع القطع الزائد مقدار من محور السينات او الصادات فان المقطوع يمثل محور حقيقي دائما 2a .
- قانون العلاقة التربيعية (ميسي) هنا

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- الاختلاف المركزي اكبر من واحد $e = \frac{c}{a} > 1$ و لا توجد مساحة ولا محيط للقطع الزائد لانه مفتوح وليس مغلق كي نستطيع حساب مساحته او محيطه كما في القطع الناقص.
- في القطع الزائد الزعامة لقيمة c .

$$c > a \qquad c > b$$

- اما قيمة a,b فالعلاقة بينهما صايرة معارك كر وفر.

ممكن ان تكون قيمة $a = b$ او $b > a$ او $a > b$
- القطع الذي تتساوى فيه $a = b$ يسمى قطع زائد قائم او متساوي الاضلاع.او القطع الذي يتساوى فيه المجال مع المدى.
- الاختلاف المركزي في القطع الزائد القائم $=\sqrt{2}$ حتى لو ما منطيه بالسؤال والنسبة بين طولي محوريه =1 والفرق بين طولي محوريه= صفر.

مسائل إيجاد معلومات القطع الزائد اذا كانت المعادلة معلومة

- حدد لمن تنتمي البؤرة من خلال الحد الموجب.
- اكتب المعادلة القياسية المشابهة للمعادلة الي بالسؤال وقارنها
- طلع قيم a,b,c وشن هجوم على المطالب.

كتاب: -عين البؤرتين والراسين والقطبين وطول ومعادلة المحورين والاختلاف المركزي

$$1)\ \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 \qquad 2)\ 12y^2 - 4x^2 = 48$$

$$12y^2 - 4x^2 = 48$$

نجعل المعادلة قياسية. يعني =1 والمعاملات =1 نقسم على 48

$$\frac{12y^2}{48} - \frac{4x^2}{48} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

البؤرة تنتمي لمحور السينات

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نقارنه مع المعادلة القياسية

$$a^2 = 64 \qquad b^2 = 36$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100$$

نقارنه مع المعادلة القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$a^2=4 \qquad b^2=12$

$c^2=a^2+b^2=4+12=16$

اذن

$a=2 \quad , \quad b=2\sqrt{3} \qquad c=4$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الحقيقي

$2a=2.2=4$ وحدة طول

طول المحور التخيلي

$2b=2.2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(0,c) \quad f_2(0,-c)$

البؤرتان $f_1(0,4) \quad f_2(0,-4)$

الراسان $v_1(0,a) \quad v_2(0,-a)$

الراسان $v_1(0,2) \quad v_2(0,-2)$

الراسان $m_1(2\sqrt{3},0) \quad m_2(-2\sqrt{3},0)$

الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{2}=2>1$

اذن

$a=8 \quad , \quad b=6 \qquad c=10$

هسه نطلع المطلوب منا

طول المحور الحقيقي

$2a=2.8=16$ وحدة طول

طول المحور المرافق

$2b=2.6=12$ وحدة طول

البؤرتان $f_1(c,0) \quad f_2(-c,0)$

البؤرتان $f_1(10,0) \quad f_2(-10,0)$

الراسان $v_1(a,0) \quad v_2(-a,0)$

الراسان $v_1(8,0) \quad v_2(-8,0)$

القطبان $M_1(0,b) \quad M_2(0,b)$

القطبان $M_1(0,6) \quad M_2(0,-6)$

الاختلاف المركزي

$e=\frac{c}{a}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}>1$

إيجاد معادلة القطع الزائد

ملاحظات مهمة للحل عدة الهجوم لازم تعرف ذن الملاحظات حتى تكدر تحل.

- اذا اعطى طول محور حقيقي طلع منه a واذا مرافق او تخيلي طلع منه b واذا بعد بؤري طلع cوذلك بالقسمة على 2 .
- البؤرتان والراسان والقطبان نستفاد منهم مرتين مرة نطلع a, b,c ومرة نحدد موقع البؤرتان.
- القطع الزائد اذا (مر، مس، قطع) بنقطة واحد من احداثياتها صفر مثلا يمر بنقطة تقاطع او نقطة تماس او بؤرة لقطع اخر تتحول هذه النقطة الى راسان. نجد منهم a.
- اذا لم يحدد موقع البؤرتان ناخذ احتمالين مرة الى السينات ومرة الى الصادات ونكتب المعادلة مرتين.
- اذا اعطى النسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي او المرافق فان قيمة c دائما تقابل الرقم الأكبر لان هي الزعيمة في القطع الزائد.

مثال النسبة بين البعد البؤري والطول محوره الحقيقي $\frac{2a}{2c}=\frac{3}{4}$ هيج يكون.

أخفى الهوى ومدامعي تبديه واميته وصبابتي تحييه
فكأنه بالحسن صورة يوسف وكأنني بالحزن مثل ابيه
ابن الفارض

كتاب-2011-خ العراق: -جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي 2 وبؤرتاه تقعان على محور السينات.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a}$ $\quad 2 = \frac{c}{a}$ $\quad c = 2a$

$c = 2 . a = 2 . 3 = 6$

$c^2 = 36$

المعلومة الثانية: -طول المحور الحقيقي

$2a = 6 \quad a = 3 \quad a^2 = 9$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان على محور السينات .معطى

هسه نربط بالمنقذ.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$36 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 36 - 9 = 27$ $\qquad a^2 = 9 \qquad b^2 = 27$

القطع ينتمي لمحور السينات $\quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

كتاب-2015-تمهيدي: -اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل اذا علمت ان احد راسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 1,9 على الترتيب اذا علمت ان محوراه ينطبقان على المحورين الاحداثيين.

ملاحظة في القطع الزائد اذا اعطى بعد احد الراسين يبعد عن البؤرتين فان

$2a =$ حاصل طرح البعدين

$2c =$ حاصل جمع البعدين

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: - المسافة بين البؤرتين

$2c = 9 + 1 \quad 2c = 10$

$c = 5 \quad c^2 = 25$

المعلومة الثانية: - المسافة بين الراسين

$2a = 9 - 1 \quad 2a = 8$

$a = 4 \quad a^2 = 16$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$25 = 16 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 16 = 9$ $\qquad a^2 = 16 \qquad b^2 = 9$

[ما دام ما عندي بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد لمن ينتمي القطع الزائد لازم اخذ احتمالين]

1-القطع ينتمي لمحور السينات $\quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2-القطع ينتمي لمحور الصادات $\quad \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

أعتقد أنها إهانة فظيعة أن يكون للمرء روح محكومة جغرافياً. جورج سانتيانا.

كتاب-2014-د4: -جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\mp 6, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 4$ اذا كان مركزه نقطة الأصل .

المعلومة الاولى
البؤرتان $f_1(6,0) \quad f_2(-6,0)$
$c = 5 \quad c^2 = 25$
القطع ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان ع السينات

المعلومة الثانية :- نقطة تقاطع القطع مع محور السينات هي $(\mp 4, 0)$ وهي تنتمي لمحور السينات . وهي تمثل راس فقط
$a = 4 \quad a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad 25 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16 \qquad a^2 = 9 \qquad b^2 = 16$

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

كتاب-2010-تمهيدي: -النقطة $p(6, l)$ تنتمي للقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$
جد 1-قيمة L 2-طول نصف القطر البؤري المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة p .

ملاحظة: - طول نصف القطر البؤري للقطع الزائد هو البعد من أي نقطة p الى البؤرتين .

- اذا القطع ينتمي لمحور السينات فالبعد بين $pf1$ يسمونه طول نصف القطر البؤري الايمن وبالنسبة $pf2$ يسمونه الايسر.
- واذا القطع الزائد ينتمي للصادات $pf1$ يسمونه الاعلى . $pf2$ يسمونه الأسفل.
- ولكي نجدهم نجد البؤرتان ولازم عندي النقطة p ونطبق قانون البعد بين نقطتين

1-$p(6, l)$ تنتمي لمعادلة القطع الزائد تحقق معادلته يعني نعوضها بالمعادلة .

$6^2 - 3l^2 = 12 \rightarrow\rightarrow \quad 36 - 12 = 3l^2 \qquad 24 = 3l^2 \quad \div 3 \rightarrow \qquad l^2 = 8 \qquad \sqrt{\text{للطرفين}}$

$l = \pm 2\sqrt{2} \quad \rightarrow\rightarrow \qquad \therefore p(6, 2\sqrt{2}) \qquad p(6, -2\sqrt{2})$

2-نجد نصف القطر البؤري الايمن المرسوم من النقطة p =pf1

بالنسبة للنقطة p ناخذ الموجب لان متناظرات فأي وحدة نأخذها صحيح.

$x^2 - 3y^2 = 12 \quad \div 12$ ق ز ينتمي لمحور السينات (لأنه موجب)

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad a^2 = 12 \qquad b^2 = 4$

$c = 4c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$ هسه نطلع c من المنقذ

هسه نكتب بؤرتا القطع الزائد الذي ينتمي لمحور السينات البؤرتان $f_1(4,0) \quad f_2(-4,0)$

$pf1 = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2} == \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

كتاب: اكتب المعادلة القياسية للقطع الزائد في الحالات التالية: -

1-طول محوره الحقيقي 12 وحدة وطول محوره التخيلي 10 وحدة.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: - طول محوره الحقيقي

$2a = 12 \quad a = 6 \quad a^2 = 36$

المعلومة الثانية: - طول المحور التخيلي

$2b = 10 \quad b = 5 \quad b^2 = 25$

[ما دام ما عندي بؤرة ولا راس ولا قطب ولا هو محدد لمن ينتمي القطع الزائد لازم اخذ احتمالين]

1-القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2-القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

كتاب: اكتب المعادلة القياسية للقطع الزائد في الحالات التالية: -

2-مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ واختلافه المركزي يساوي 3.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a} \qquad 3 = \frac{c}{a} \qquad c = 3a$

$c^2 = 9a^2 \qquad (1)$

المعلومة الثانية: -طول المحور المرافق

$2b = 2\sqrt{2} \qquad b = \sqrt{2} \qquad b^2 = 2$

البؤرتان على محور الصادات .معطى.

هسه نربط بالمنقذ.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$9a^2 = a^2 + 2 \to\to 8a^2 = 2 \qquad a^2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ولقدْ خلوتُ معَ الحبيبِ وبيننا ... سِرٌّ أرَقّ مِنَ النّسيمِ، إذا سرَى
وأباحَ طرفي نظرةً أمّلتهـا ... فغدوتُ معروفاً وكنتُ منكَّرا
فدهشتُ بينَ جمالِهِ وجلالِهِ ... وغدا لسانُ الحالِ عني مخبرا
فأدِرْ لِحاظَكَ في مَحاسِنِ وَجْهِهِ، ... تَلْقَى جَميعَ الحُسْنِ، فيهِ، مُصَوَّرَا
لوْ أنّ كُلّ الحُسْنِ يكمُلُ صُورَةً، ... ورآهُ كانَ مهلَّلاً ومكبِّراً

أسئلة الربط بين القطوع

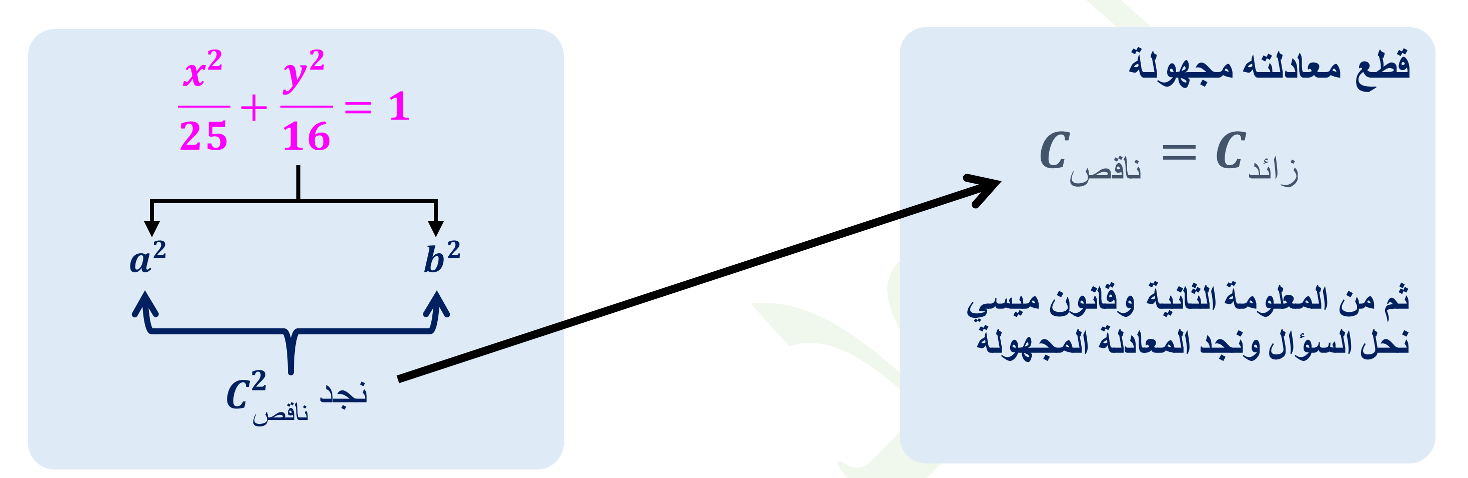
راح اشرح حالات ممكن يكون بيها القطع الناقص والمجهول وممكن الزائد هو المجهول

الفكرة شنو؟

نعوف المجهول دائما ونروح للمعادلة المعلومة نطلع منها لو c لو a لو b وننقلها الى القطع المجهول.

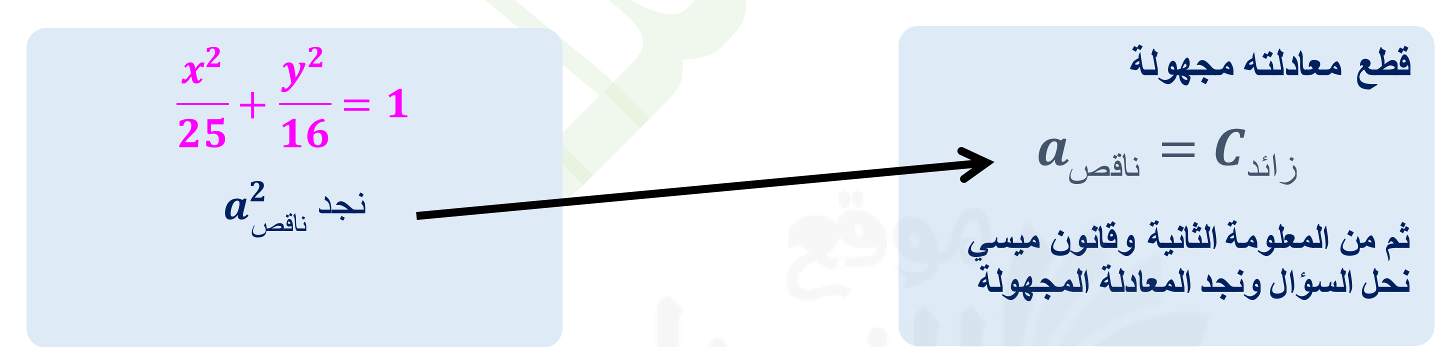
☒ الحالة الأولى مثلا يكول جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص. يعني بؤرتا القطع الزائد=بؤرتا القطع الناقص

$$c_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}}$$



☒ الحالة الثانية مثلا يكول جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما راسا القطع الناقص. يعني

$$a_{\text{ناقص}} = c_{\text{زائد}}$$



وهكذا لو كال قطباه.

☒ الحالة الثالثة: - اذا مر القطع الزائد بنقطة بشرط تحتوي على صفر تتحول دائما الى راس فقط وفقط مو تنسى.
واذا مر ببؤرة لقطع اخر شنو نسوي ؟ مثلا قطع زائد يمر او مار ببؤرتي القطع الناقص
نجد بؤرتا القطع الناقص ونحولها الى راس للقطع الزائد.
يعني

$$c_{\text{ناقص}} = a_{\text{زائد}}$$

ثم نكمل الخطوات مالت الحل.

2001-د1:- جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه $\frac{1}{2}$

الحل:- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b مالات الناقص ثم منهم اطلع c .

$3x^2 + 5y^2 = 120 \quad \div 120$

$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر)

$a^2 = 40 \qquad b^2 = 24$

هسه نطلع c

$c^2 = a^2 - b^2 = 40 - 24 = 16$

$c_{\text{ناقص}} = 4$

هما نفسهما بؤرتا القطع الزائد.

$c_{\text{زائد}} = 4 \qquad c^2 = 16$

بؤرتا القطع الزائد تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية: -

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \qquad \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow\rightarrow a = 2 \qquad a^2 = 4$

ومن قانون ميسي الزائد

$c^2 = a^2 + b^2$

$16 = 4 + b^2 \qquad b^2 = 16 - 4 = 12$

$a^2 = 4 \qquad b^2 = 12$

اذن هسه نكتب معادلة الزائد المطلوبة

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

2002-د2:- جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما راسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه $\frac{1}{2}$

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: -من معادلة القطع الناقص نطلع a.

$x^2 + 9y^2 = 36 \quad \div 36$

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = 36 \qquad a_{\text{ناقص}} = 6$

القطع الناقص بؤرتاه يقع على محور السينات

هما نفسهما بؤرتا القطع الزائد سيني البؤرة

$c_{\text{زائد}} = 6 \qquad c^2 = 36$

المعلومة الثانية النسبة بين طول المحور الحقيقي للزائد والبعد بين البؤرتين

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \qquad \frac{a}{6} = \frac{1}{2}$

$a = 3 \qquad a^2 = 9$

$36 = 9 + b^2$

$36 - 9 = b^2$

$b^2 = 27$

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

د1 .2017:-جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي قطع ناقص معادلته: $36x^2 + 11y^2 = 396$ واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ الذي بؤرته تقع على محور الصادات ويمر دليله بالنقطة (4,7) .

الحل :- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الأولى :-من معادلة القطع الناقص نطلع c.

$36x^2 + 11y^2 = 396 \quad \div 36$

$\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$

$----a^2 = 36 \qquad b^2 = 11$

$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 11 = 25$

$c_{ناقص} = 5$

القطع الناقص تقع بؤرتاه على محور الصادات

القطع الزائد يمر ببؤرة الناقص يعني نحول بؤرة الناقص الى راس للزائد.

$a_{زائد} = 6 \qquad a^2 = 36$

البؤرتان تنتمي الى الصادات

المعلومة الثانية: -

القطع المكافيء بؤرته على الصادات

اذن دليل القطع المكافيء هو

p=7 $\qquad y = 7$

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب

اذن البؤرة تنتمي للصادات السالب

بؤرة القطع المكافئ $\quad f(0,-p) \rightarrow f(0,-7)$

بؤرتا القطع الزائد =بؤرة القطع المكافيء

$c_{زائد} = p_{مكافيء}$

$c = 7 \qquad c^2 = 49$

القطع الزائد ينتمي لمحور الصادات.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad 49 = 25 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 49 - 25 = 24 \qquad a^2 = 25 \qquad b^2 = 24$

البؤرتان تنتمي لمحور الصادات $\qquad \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

2009-كتاب:-جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافيء $x^2 + 12y = 0$

الحل:- من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: - من معادلة القطع الناقص نطلع c.

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر)

$----a^2 = 25 \qquad b^2 = 9$

هسه نطلع c من المنقذ مالت الناقص دير بالك ترى جاي نحجى احنا بالناقص

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

$c = 4$

هما نفسهما بؤرتا القطع الزائد.

$c_{زائد} = c_{ناقص}$

$c = 4 \qquad c^2 = 16$

البؤرتان تنتمي الى الصادات

المعلومة الثانية :-من معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات السالب نجد p .

$x^2 = -12y$

$x^2 = -4py$

$-------4p = 12 \qquad p = 3$

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب (عكس البؤرة دوما)

$y = p \qquad y = 3$

اذن نقطة التماس بين دليل القطع المكافيء والقطع الزائد $(0,3)$

نقطة التماس تمثل راس للزائد دائما.

$a = 3 \qquad a^2 = 9$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$a^2 = 9 \qquad b^2 = 7$

$16 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 7$

البؤرتان تنتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$ $\qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

2014-د1-كتاب:-قطع زائد طول محوره الحقيقي 6وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافيء الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1,-2\sqrt{5})(1,2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطع المكافيء الذي راسه نقطة الأصل والزائد الذي مركزه نقطة الأصل.

الحل: - من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى: - طول المحور الحقيقي

$2a = 6 \qquad a = 3 \qquad a^2 = 9$

ننقل بؤرة المكافيء ونسويها ببؤرة القطع الزائد

$c_{\text{زائد}} = p_{\text{مكافيء}} = 5$

$c = 5 \qquad c^2 = 25$

وهما ينتميان لمحور السينات

هسه نربط بين المعلومتين عن طريق المنقذ .

المعلومة الثانية: - قيمة x=1 ثابتة لم تتغير

اذن القطع المكافيء متناظر حول محور السينات الموجب

اذن البؤرة تقع على السينات الموجب. نكتب المعادلة ونعوض وحدة من النقاط حتى نطلع قيمة p

$y^2 = 4px$

$(1,2\sqrt{5})$ تنتمي للقطع المكافيء تحقق معادلته.

$(2\sqrt{5})^2 = 4p.\ 1 \rightarrow 20 = 4p \rightarrow p = 5$

هسه نرجع نعوض p في المعادلة. لان مطلوب همينا معادلة القطع المكافيء

$y^2 = 4px \rightarrow\rightarrow y^2 = 4.5x \qquad y^2 = 20x$

ناخذ بؤرة القطع المكافيء

$c_{\text{زائد}} = p_{\text{مكافيء}} = 5$

وهي نفسها بؤرة القطع الزائد .

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$25 = 9 + b^2 \rightarrow\rightarrow b^2 = 25 - 9 = 16$$

البؤرتان تنتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2013-د3:-جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{3}$

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى:- $c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}}$

من الزائد نطلع c.

القطع الزائد ينتمي لمحور السينات (لأنه موجب)

$x^2 - 3y^2 = 12 \qquad \div 12$

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

المعلومة الثانية النسبة بين طولي محوري الناقص

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \qquad \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$

$a = \frac{5}{3}b \qquad a^2 = \frac{25}{9}b^2 ----1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$$----a^2 = 12 \qquad b^2 = 4$$

هسه نطلع c من المنقذ مالت الزائد

$$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$$
$$c = 4$$

بؤرتا القطع الزائد الذي ينتمي لمحور السينات هما نفسهما بؤرتا القطع الناقص.

$$c_{زائد} = c_{ناقص} \qquad c = 4 \qquad c^2 = 16$$

البؤرتان تنتمي الى السينات

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

توحيد بالمقص $16 = \frac{25}{9}b^2 - b^2$

$$16 = \frac{25b^2 - 9b^2}{9} = \frac{16b^2}{9}$$

$$16 = \frac{16b^2}{9} \rightarrow\rightarrow 1 = \frac{b^2}{9}$$

$$b^2 = 9$$

نعوض في معادلة1 $a^2 = \frac{25}{9} . 9 = 25$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

==

الحالة الرابعة

اذا ذكر في السؤال (قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الاخر) او (بؤرتا القطع الزائد رأسا القطع الناقص ويمر القطع الزائد ببؤرة القطع الناقص) شنو يعني ؟

راسا القطع الزائد (يمر) = بؤرتا القطع الناقص $c_{ناقص} = a_{زائد}$

بؤرتا القطع الزائد =راسا القطع الناقص $a_{ناقص} = c_{زائد}$

والحل بسيط جدا

- ✓ تروح لمعادلة القطع المعطاة بالسؤال تطلع منها a ,c
- ✓ تحول ذن المعلومتين الى القطع المجهول بس تكلبهن بالعكس حسب القانون أعلاه.

2005-د2-:-قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرتي الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ومحوراهما منطبقان على المحاور الاحداثية.

من معادلة القطع الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها a ,b مالات الناقص ثم منهم اطلع C .

القطع الناقص ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر)

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$-----a^2 = 25 \qquad b^2 = 9$$

هسه نطلع c من ميسي

$$a_{ناقص} = 5 \qquad \therefore c_{ناقص} = 4 \qquad c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

بؤرتا القطع الناقص على السينات.

بالنسبة للقطع الزائد

$\therefore c_{زائد} = 5$		$a_{زائد} = 4$

$c^2 = a^2 + b^2$		$25 = 16 + b^2$		$b^2 = 25 - 16 = 9$		$b^2 = 9$

البؤرتان تنتمي الى السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

2005-د2-:-جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما راسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ والمار ببؤرتي القطع الناقص نفسه. ثم جد مساحة القطع الناقص

من معادلة ق ن نطلع منها a ,b مالات الناقص ثم منهم اطلع c .القطع الناقص ينتمي لمحور السينات (مقام الاكبر).

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

– – – – – – – – – – – – – – $a^2 = 100$		$b^2 = 64$

نجد c للناقص

$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36$		$\therefore c_{ناقص} = 6$		$a_{ناقص} = 10$

القطع الناقص بؤرتاه الذي تنتمي لمحور السينات

بالنسبة للقطع الزائد

$\therefore c_{زائد} = 10$		$a_{زائد} = 6$

$c^2 = a^2 + b^2$		$100 = 36 + b^2$		$b^2 = 100 - 36 = 64$		$b^2 = 64$

البؤرتان تنتمي الى السينات ايضا.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$$

الحياة المليئة بالأخطاء أكثر نفعاً وجدارة بالاحترام من حياة فارغة من أي عمل.

"برناردشو"

قرِّب خطاك فإنّني مشتاق		عندي الحنين وعندك الإشفاق !

أتراك لم تعلم بحالي بعدما		عصفت براحة قلبي الأشواق

2014-2016د1:-جد معادلة القطع الزائد والناقص كل منهما يمر ببؤرتي القطع الاخر وكلاهما تقعان على المحور السيني وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي 6 وحدة طول.

كل منهما يمر ببؤرة الاخر

بؤرتا القطع الناقص على السينات	بؤرتا القطع الزائد على السينات
معلومة السؤال الاولى تخص القطع الناقص طول المحور الكبير $2a = 6\sqrt{2}$ $a_{ناقص} = 3\sqrt{2}$ $a^2 = 18$ $\therefore c_{ناقص} = 3$ $c^2 = 9$ من المنقذ $c^2 = a^2 - b^2$ $9 = 18 - b^2$ $b^2 = 18 - 9 = 9$ البؤرتان تنتمي الى السينات. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$	معلومة السؤال الثانية تخص القطع الزائد طول المحور الحقيقي $2a = 6$ $a_{زائد} = 3$ $a^2 = 9$ $\therefore c_{زائد} = 3\sqrt{2}$ $c^2 = 18$ من المنقذ(ميسي) $c^2 = a^2 + b^2$ $18 = 9 + b^2$ $b^2 = 18 - 9 = 9$ البؤرتان تنتمي الى السينات. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

2009-د1:-جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9x^2 - 16y^2 = 144$ و يقطع من محور السينات جزءا طوله 12 وحدة.

من المعلومات المعطاة في السؤال

المعلومة الاولى :-من الزائد نجد c .
القطع الزائد ينتمي لمحور السينات (لأنه موجب)

$9x^2 - 16y^2 = 144 \quad \div 144$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$-----a^2 = 16 \qquad b^2 = 9$

هسه نطلع c

$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$

$c = 5$

ق ن يمر ببؤرتي ق ز. فعدنا احتمالين.
الاحتمال الاول بؤرتا الزائد =قطبا الناقص لأنه يمر بهما
على السينات $b = 5 \quad b^2 = 25$
البؤرتان تنتمي لمحور الصادات لان القطبان على السينات

المعلومة الثانية الجزء المقطوع يمثل طول محور كبير.

$2a = 12 \qquad a = 6$

$a^2 = 36 ----1$

مادام a ظهرت أكبر من b اذن الاحتمال صحيح ونكمل الحل. ولو طالع اقل اخذ الاحتمال الثاني.
اذن المعادلة
البؤرتان تنتمي لمحور الصادات

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

إيجاد المجاهيل h ,k

نطبق ملاحظات الحالة الأولى والثانية راجع صفحة 30.

2017-د1-:-قطع زائد معادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ طول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة طول. وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيم $h, k \in R$

هذا السؤال على موضوع ايجاد قيم h ,k وعندي اثنينهم مجهولين يعني الحالة الثانية B . راجع الخطوات .

المعلومة الاولى :- من الناقص لازم نسويها قياسية ونطلع منها c.

$9x^2 + 16y^2 = 576 \quad \div 576$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$a^2 = 64 \qquad b^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2 = 64 - 36 = 28 \qquad c = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

بؤرتا القطع الناقص على السينات

اذن بؤرتا الزائد

$c = 2\sqrt{7} \qquad c^2 = 28$

ق ز ينتمي لمحور السينات لان البؤرتان تنتمي الى السينات

المعلومة الثانية طول المحور الحقيقي $\quad 2a = 6\sqrt{2} \qquad a = 3\sqrt{2} \qquad a^2 = 18$

هسه نربط عن طريق المنقذ

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad 28 = 18 + b^2 \qquad b^2 = 28 - 18 \quad b^2 = 10$

$a^2 = 18 \qquad b^2 = 10$

هسه نروح نسوي المعادلة قياسية مالت الزائد.

$.hx^2 - ky^2 = 90 \quad \div 90 \qquad \frac{hx^2}{90} - \frac{ky^2}{90} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$ بما ان القطع ينتمي للسينات

نقارن ونجد المجاهيل

$$a^2 = \frac{90}{h} \xrightarrow{yields} 18 = \frac{90}{h} \xrightarrow{yields} h = \frac{90}{18} = 5$$

$$b^2 = \frac{36}{k} \xrightarrow{yields} 10 = \frac{90}{k} \xrightarrow{yields} k = \frac{90}{10} = 9$$

2015-تمهيدي-:-قطع زائد معادلته $5y^2 - 4y^2 = k$ **احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافيء الذي معادلته** $4y - \sqrt{5}x^2 = 0$ **جد قيم** $k \in R$

الحل: - هاي حالة A لان مجهول واحد هو k

1-من معادلة القطع المكافيء نبسطها.

$-\sqrt{5}x^2 = -4y \qquad \div -\sqrt{5}$

$x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}y$

$x^2 = 4py$

$---4p = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad \div 4 \qquad p = \frac{1}{\sqrt{5}}$

البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب هي نفسها بؤرة القطع الزائد.

$c = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad c^2 = \frac{1}{5}$

2- البؤرتان تنتمي الى الصادات.

3-هسه نسوي المعادلة قياسية

$5y^2 - 4x^2 = k \qquad \div k.$

$\frac{5y^2}{k} - \frac{4x^2}{k} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{\frac{5}{k}} - \frac{x^2}{\frac{4}{k}} = 1$ للصادات

$a^2 = \frac{5}{k} \qquad b^2 = \frac{4}{k}$

ومن المنقذ

$c^2 = a^2 + b^2$

$\frac{1}{5} = \frac{k}{5} + \frac{k}{4}] \qquad \times 20$

$4 = 4k + 5k$

$4 = 9k$

$k = \frac{4}{9}$

2007-د1-:-قطع زائد معادلته $x^2 - ky^2 = 3$ **احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافيء الذي معادلته** $y^2 + 8x = 0$ **جد قيم** $k \in R$

1-من معادلة القطع المكافيء لازم نبسطها.

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$----4p = -8 \qquad \div -4 \qquad p = 2$

بؤرة القطع المكافيء تنتمي لمحور السينات السالب هي نفسها بؤرة القطع الزائد

$c = 2 \qquad c^2 = 4$

2-القطع ينتمي لمحور السينات.

3-هسه نساوي المعادلة قياسية

$x^2 - ky^2 = 3 \qquad 3$

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$ بما ان القطع سيني

$a^2 = 3 \qquad b^2 = \frac{3}{k}$

ومن المنقذ

$c^2 = a^2 + b^2$

$4 = 3 + \frac{3}{k}$

$4 - 3 = \frac{3}{k}$

$1 = \frac{3}{k} \qquad k = 3$

اسئلة القطوع المخروطية والى ما محدد بيها نوع القطع

لازم بالبداية نعرف نوع القطع.

- اذا انطى اختلاف مركزي فهذا القطع لو ناقص لو زائد. وإذا الاختلاف المركزي أكبر من واحد فهو زائد وإذا اقل من واحد فهو ناقص.
- من مقارنة قيم (a ,b ,c) بالزائد c هو الاكبر من الكل . وبالناقص a هو الاكبر. واذا انطى نسبة بين محاور او بين a و c او a و b بهاي القيم كلها نشوف منو الاكبر والتحديد يكون بالمقارنة .

2004-د1: -جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه $f(-5,0)$ وأحد راسيه $v(3,0)$

الحل بما ان البؤرتان اكبر من الراسان $c = 5 > a = 3$ اذن القطع هو قطع زائد .

المعلومة الأولى

البؤرتان $f_1(5,0)$ $f2(-5,0)$

$c = 5$ $c^2 = 25$

البؤرتان على محور السينات .

المعلومة الثانية

الراسان $v_1(3,0)$ $v2(-3,0)$

$a = 3$ $a^2 = 9$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$25 = 9 + b^2 \to\to b^2 = 25 - 9 = 16$ $a^2 = 9$ $b^2 = 16$

القطع ينتمي لمحور السينات $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2007-د1: -جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي 3 ويمر بالنقطة $(0,2)$

الحل - بما ان الاختلاف المركزي اكبر من واحد فالقطع المخروطي هو قطع زائد.

المعلومة الاختلاف المركزي

$e = \frac{c}{a}$ $3 = \frac{c}{a}$ $c = 3a$

$c^2 = 9a^2$ (1)

$c^2 = 9.4 = 36$

المعلومة الثانية: - القطع الزائد يمر بالنقطة (0,2) فهي تمثل راس القطع الزائد (دائما)

الراسان $v_1(0,2)$ $v2(0,-2)$

$a = 2$ $a^2 = 4$

البؤرتان تنتمي لمحور الصادات لان الراسان على محور الصادات .معطى.

هسه نربط بالمنقذ.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$36 = 4 + b^2 \to\to$ $a^2 = 36 - 4 = 32$ $a^2 = 4$ $b^2 = 32$

القطع ينتمي لمحور الصادات $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

2017-د3- قطع مكافئ معادلته $x^2 = 10y - 3ky$ ومعادلة دليله $y = 2k$ جد قيمة k ومعادلة القطع الزائد الذي بؤرته بؤرة القطع المكافيء وطول محوره المرافق وحدتا طول .

توضيح:- ما نكدر نحدد اتجاه القطع المكافيء لان قيمة k مجهولة ولا نستطيع تحديدها هل موجب ام سالب والحل هو ان نفرض الاتجاه فرض ونجد قيمة k ونتأكد من إشارة p اذا ظهرت موجب فالفرض صحيح والعكس بالعكس.

1-الاحتمال الأول: -بؤرة القطع المكافيء تنتمي لمحور الصادات السالب والدليل موجب.

$x^2 = (10 - 3k)y$

$x^2 = -4py$

---------------- $-4p = 10 - 3k \rightarrow\rightarrow$ $p = \frac{10-3k}{-4} = -\frac{10-3k}{4}$ (1)

الدليل ينتمي لمحور الصادات الموجب

$y = 2k$

$y = p \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ $p = 2k$ (2)

نساوي المعادلتين

$2k = -\frac{10 - 3k}{4}$ $8k = -10 + 3k$ $8k - 3k = -10$

$5k = -10$ $k = -2$ **عوض في معادلة 2.**

$p = 2 \times -2 = -4$ **تهمل الفرض خطا نمسح الحل ونعيد من جديد لأنها سالب**

2-البؤرة تقع الصادات الموجب والدليل مع السالب. $x^2 = (10 - 3k)y$

$x^2 = 4py$

---------------- $4p = 10 - 3k \rightarrow\rightarrow$ $p = \frac{10-3k}{4}$ (1)

الدليل ينتمي لمحور الصادات السالب $y = 2k$

$y = -p \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow -p = 2k$ $p = -2k$ $--(2)$

نساوي المعادلتين

$-2k = \frac{10-3k}{4}$ $\rightarrow$ $-8k = 10 - 3k$ $\rightarrow -8k + 3k = 10$

$-5k = 10$ $\rightarrow$ $k = -2$

عوض في معادلة 2. (الحل صح) $p = -2 \times -2 = 4$

بؤرة القطع المكافيء هي $f(0,4)$

بؤرتا القطع الزائد تنتمي لمحور الصادات $c = 4$ $c^2 = 16$

طول المحور المرافق $b^2 = 1$ $b = 1$ $2b = 2$

$a^2 = 15$ $16 = a^2 + 1$ $c^2 = a^2 + b^2$

معادلة القطع الزائد هي

$$\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{1} = 1$$

ايجاد معادلة القطع الزائد باستخدام التعريف

- تطلع البؤرتان او هو ينطيكياها.
- نطلع طول المحور الحقيقي=2a او ينطيه بالسؤال.
- نفرض نقطة $p(x,y)$ تنتمي للقطع الزائد . 4-نكتب قانون تعريف القطع الزائد $|pf1 - pf2| = 2a$
- نطبق قانون البعد بين نقطتين بين $pf1$ وثم بين $pf2$ ثم نعوض بالقانون ونبسط ونجد الناتج

$$\left|\sqrt{(x \pm c)^2 + (y \pm c)^2} - \sqrt{(x \mp c)^2 + (y \mp c)^2}\right| = 2a$$

كتاب :- جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $f2(-2\sqrt{2}, 0)$ $f1(2\sqrt{2}, 0)$ والقيمة المطلقة للفرق بين بعدى اية نقطة عن بؤرتيه تساوى 4 وحدات ومركزه نقطة الأصل .

الحل: - ملاحظات مهمة ديربالك عليها

- ☒ القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه =طول المحور الحقيقي=2a
- ☒ عند رفع القيمة المطلقة يجب وضع $\mp$ للطرف الثاني.

البؤرتان تنتمي للسينات $f1(2\sqrt{2}, 0)$ $f2(-2\sqrt{2}, 0)$

طول المحور الحقيقي=العدد الثابت=2a=4 معطى في السؤال.

نفرض p(x ,y) تنتمي للقطع الزائد . ومن تعريف القطع الزائد $|pf1 - pf2| = 2a$ ومن قانون البعد بين نقطتين

$$\left|\overbrace{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + (y-0)^2}}^{pf1} + \overbrace{\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + (y-0)^2}}^{pf2}\right| = \overbrace{4}^{2a}$$

بالتربيع
$$\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + y^2}$$

$$(x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} + (x+2\sqrt{2})^2 + y^2$$

بالاختصار
$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 16 \pm \sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + y^2$$

$$-4\sqrt{2}x = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} + 4\sqrt{2}x$$

$$-8\sqrt{2}x - 16 = \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} \qquad \div -8$$

$$\sqrt{2}x + 2 = \pm\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4 = (x+2\sqrt{2})^2 + y^2$$

$$2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4 = x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2$$ نختصر و ننقل

$$2x^2 - x^2 - y^2 = 8 - 4$$

$$x^2 - y^2 = 4 \qquad \div 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

حشر مع الخرفان عيد!

قلت ما هذا الكلام؟!

إن أعوام الأسى ولت، وهذا خير عام

إنه عام السلام.

عفط الكائن في لحيته.. قال: بليد.

قلت: من أنت؟!

وماذا يا ترى مني تريد؟!

قال: لا شيء بتاتاً .. إنني العام الجديد!

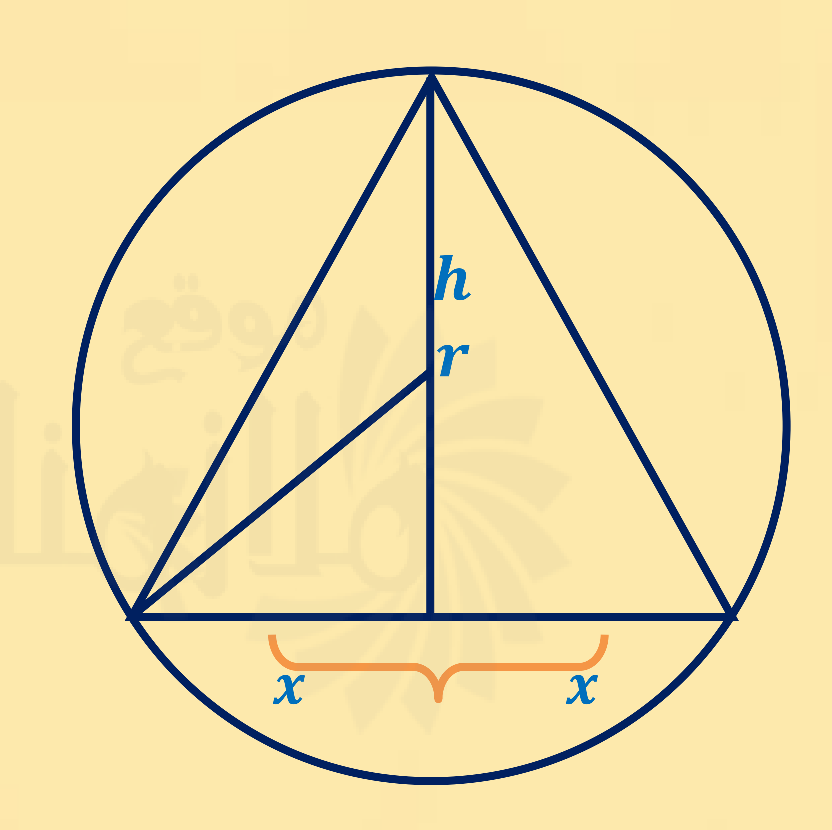
احمد مطر.

2019

السادس العلمي ـ أحيائي

الرياضيات

التفاضل



اعداد الاستاذ

امجد سلمان

شرح مفصل للمادة - حلول التمارين - أسئلة وزارية - أسئلة إثرائية متنوعة

طبعة جديدة ومنقحة وفق المنهج الحديث

2019

تطبيقات التفاضل

السادس الاحيائي-السادس التطبيقي

أ. امجد سلمان
ميسان-العمارة
رابط قناتي الخاصة على التلغرام @xymath

توزيع درجات هذا الفصل حسب مواضيعه وزاريا

طبعا الفصل الأهم في كل الرياضيات

يأتي عليه وزاريا 40% وبواقع أربعة افرع .

١- المشتقات العليا أهميته وزاريا 30%

٢- المعدلات المرتبطة بالزمن أهميته وزاريا 100%

٣- مبرهنة رول أهميته وزاريا 20%

٤- مبرهنة القيمة المتوسطة أهميته وزاريا 20%

٥- إيجاد الثوابت =المجاهيل في رول والقيمة المتوسطة أهميته وزاريا 50%

٦- التقريب او نتيجة القيمة المتوسطة أهميته وزاريا 80%

٧- النهايات والتزايد والتناقص لا يأتي وزاريا لكن مهم للمواضيع التي تاتي بعده

٨- الانقلاب والتقعر والتحدب لا يأتي وزاريا لكن مهم للمواضيع التي تاتي بعده

٩- استخدام اختبار المشتقة الثانية لمعرفة نوع النهايات . لا يأتي وزاريا لكن مهم للمواضيع التي تاتي بعده

١٠- إيجاد الثوابت في النهايات والانقلاب أهميته وزاريا 70%

١١- رسم الدوال أهميته وزاريا 30%

١٢-التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى أهميته وزاريا 100%

تم شرح المواضيع بطريقة الحالات حيث قمت بتقسيم الموضوع الى عدة حالات حسب طريقة الحل ونوع السؤال لكي يتمكن الطالب من حل المواضيع بنفس هذا النمط و لكي لا تختلط عليه الأسئلة

واعتذر جدا مقدما عما سيرد من أخطاء طباعية ، فانا أقوم بالطباعة و بسرعة بالإضافة الى انشغالي بالتدريس لذلك الأخطاء واردة وجل من لا يخطا

أتمنى من الطلبة في حالة العثور على خطا طباعي تبليغي لكي يتم تنقيح الطبعة

الفصل الثالث-تطبيقات التفاضل

يرمز للدالة بالرموز المعتادة وهي $y = f(x)$ كما يرمز للمشتقة بالرموز التالية $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x)$

سوف نقوم بشرح المشتقات التي تعلمها الطالب في دراسته السابقة-الخامس علمي-.

مراجعة لطرق الاشتقاق

١-مشتقة الثابت (الرقم بدون x) =0

$y = f(x) = 5 \qquad \frac{dy}{dx} = 0$

$y = f(x) = -43 \qquad \frac{df(x)}{dx} = 0$

$y = f(x) = \sqrt{3} \qquad y' = 0$

$y = f(x) = (1+\sqrt{5})^2 \qquad f'(x) = 0$

$y = f(x) = \frac{1}{3} + 23 \qquad y' = 0$

$y = f(x) = c \qquad \frac{dy}{dx} = 0$

٢-مشتقة (x^n)متغير مرفوع لاس عدد نتبع

$$\frac{dy}{dx} = n\, x^{n-1}$$

$f(x) = x^5 \qquad \frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$

$f(x) = x^{14} \qquad y' = 14x^{13}$

$y = x^{-8} \to f'(x) = -8x^{-8-1} = -8x^{-9}$

ملحوظة: -اذا x بالمقام صعدها وغير اشارة الاس مالتها بعدين يالله تشتقها.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3}$

هم ملحوظة: - اذا الاس فوك x عبارة عن كسر. من نشتق راح نطرح واحد، لازم نوحد مقامات بالمقص وكذا. بس اكو طريقة سريعة نستخدمها أفضل

$$y' = \text{الاس}\ x^{\frac{\text{بسط}-\text{مقام}}{\text{مقام}}}$$

$y = x^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1-2}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

$y = x^{\frac{1}{3}}$

$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1-3}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$y = x^{\frac{5}{4}}$

$y' = \frac{5}{4}x^{\frac{5-4}{4}} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$

$y = x^{\frac{-5}{8}}$

$y' = -\frac{5}{8}x^{\frac{-5-8}{8}} = -\frac{5}{8}x^{\frac{-13}{8}}$

قصاصة: - اذا منطيك جذر ما يصير تشتق لازم تتخلص منه حسب

$$\sqrt[\text{دليل}]{x^{\text{اس}}} = x^{\frac{\text{اس}}{\text{دليل}}}$$

بعدين نشتق حسب الاس الكسري

$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

$y = \sqrt[5]{x^{-7}} = x^{\frac{-7}{5}}$

$y' = \frac{-7}{5}x^{\frac{-7-5}{5}} = \frac{-7}{5}x^{\frac{-13}{5}}$

$y = \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} = x^{\frac{-6}{7}}$

$y' = \frac{-6}{7}x^{\frac{-6-7}{5}} = \frac{-6}{7}x^{\frac{-13}{7}}$

٣-مشتقة (ax^n) حيث a ثابت ، نتبع

$$\frac{dy}{dx} = a.n\,x^{n-1}$$

$f(x) = 4x^5$

$\frac{dy}{dx} = 20x^{5-1} = 20x^4$

$f(x) = 9x^{-3}$

$y' = -27x^{-4}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{4}{9}x^{\frac{-1}{3}}$

===

$y = -\frac{x}{3}$

$y' = -\frac{1}{3}$

$y = -\frac{4}{\sqrt{2x}}$

لازم نتخلص من الجذر ومن الكسر وبعدين نشتق.

$y = -\frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}x^{\frac{-1}{2}}$

هسه نشتق

$y' = -\frac{4}{\sqrt{2}} \times -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}x^{\frac{-3}{2}}$

$= \sqrt{2}x^{\frac{-3}{2}}$

قاعدة مهمة

$y = ax \qquad y' = a$

يعني الرقم يبقى فقط ومشتقة x=1.

$y = 9x \qquad y' = 9$

$y = x \qquad y' = 1$

$y = \sqrt[3]{\frac{x^5}{27}} = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{3} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{3} = \frac{1}{3}x^{\frac{5}{3}}$

$y' = \frac{1}{3}.\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{9}x^{\frac{2}{3}}$

$y = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$

$y' = -4x^{-2}$

$y = \frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$

$y' = -15x^{-4}$

١-شوف ما يصير تشتق وعندك جذر لازم بالبداية الجذر تحوله الى اس كسري وبعدين تشتق.
٢-الرقم اذا ما موجودة يمه x مشتقته=صفر مهما كانت قيمته ونوعه.
اما اذا يمه x او قوس فيه x لا تتحارش بالرقم ابدا من تشتق.
٣-إذا لكيت x بالمقام صعدها وبعدها اشتق وتكدر بعد الاشتقاق ترجعها الى المقام.

الخصومة العظيمة

تسمى الخصومة التي حدثت لثلاثين سنة بين العالم الإنكليزي السير إسحاق نيوتن والألماني غوتفريد ليبنتز حول اسبقية اكتشاف التفاضل والتكامل بالخصومة العظيمة. ابتكر نيوتن التفاضل عندما كان شابا ولم يقم بنشر بحوثه وبعد 8 سنوات نشر العالم الألماني ليبنتز بحوثه عن التفاضل والتكامل, انتبه السير إسحاق نيوتن للبحوث وقال انه كتب سابقا عن هذا الموضوع مع صديق اخر له هو المهندس ابوللو عن محاولتهم حل مواضيع الجريان والمتغيرات فتحاكما حول الاسبقية.استمرت المحاكمة بينهما لـ30 سنة

ولم تنتهي الا بعد موتهما حيث اقر المجلس العلمي اعتبار ان التفاضل والتكامل هو من اختراعهما معا. كتب نيوتن عن التكامل والتفاضل والنهايات وطورها اكثر ليبنتز و نحن الان نستخدم الرموز التي استخدمها العالم الألماني ليبنتز.

٤-مشتقة مجموع وطرح عدة دوال = كل حد نشتقه بوحده. بس قبل الاشتقاق نتخلص من الجذر والكسر

$y = x^5 - x^4 + 3x^3 + 4x^{-9} - \frac{4}{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x} + 6x - 9$

نبسط السؤال وما نكتب المشتقة الا لما نتخلص من الكسور ومن الجذور بحيث تصير بس اسس. الاعداد اذا بالمقام تبق واذا عليها جذر يبقى الجذر عليها لا تبسطه بس المتغير لازم يتبسط.

$y = x^5 - x^4 + 3x^3 + 4x^{-9} - 4x^{-2} + \sqrt[3]{2}\ x^{\frac{1}{3}} + 2\ x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 6x - 9$

هسه نشتق .حسب طريقة الاس ينزل ونطرح منه واحد .

$y = 5x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 36x^{-10} + 8x^{-3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}\ x^{\frac{-2}{3}} - x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} + 6$

$y = 4x^6 - 3x^4 + 5x^{-3} + 4x^{-2}$

$y = 24x^5 - 12x^3 - 15x^{-4} - 8x^{-3}$

مشتقة $($دالة معينة$)^n$ نتبع :-

$\frac{d}{dx}(\text{دالة معينة})^n = n\,(\text{الدالة نفسها})^{n-1}(\text{مشتقة داخل القوس}).$

$y = (x^2 - 2x + 3)^4 \qquad y' = \underbrace{4}_{n}\underbrace{(x^2 - 2x + 3)^3}_{\text{نفسها}}\ \underbrace{(2x - 2)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$

$y = (x^4 - 2x)^{-6} \qquad y' = \underbrace{-6}_{n}\underbrace{(x^4 - 2x)^{-7}}_{\text{نفسها}}\ \underbrace{(4x^3 - 2)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$

$y = (x^2 - 2)^{\frac{3}{4}} \qquad y' = \underbrace{\frac{3}{4}}_{n}\underbrace{(x^2 - 2)^{\frac{-1}{4}}}_{\text{نفسها}}\ \underbrace{(2x)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$

اذا طلعت مشتقة داخل القوس رقم و x قدمهن بالبداية.

$y' = \underbrace{\frac{3}{4}}_{n}2x\underbrace{(x^2 - 2)^{\frac{-1}{4}}}_{\text{نفسها}} \qquad y' = \underbrace{\frac{3}{2}}_{n}x\underbrace{(x^2 - 2)^{\frac{-1}{4}}}_{\text{نفسها}}$

$y = \sqrt[4]{x^2 - \frac{1}{x} + 3} \qquad y = (x^2 - x^{-1} + 3)^{\frac{1}{4}}$

هسه نشتق.

$y=(x^2-x^{-1}+3)^{\frac{1}{4}}$ $\quad y'=\underbrace{\frac{1}{4}}_{n}\underbrace{(x^2-x^{-1}+3)^{\frac{-3}{4}}}_{\text{نفسها}}\underbrace{(2x+x^{-2})}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$

٦-مشتقة حاصل ضرب دالتين =الأولى كماهي تنزل ×مشتقة الثانية + الثانية كما هي ×مشتقة الثانية

اذا لكيت (قوس. قوس) (متغير. قوس) (قوس. جذر) (متغير. جذر) هاي مشتقة ضرب دالتين.

$y=4x^2.(x^2-2x)^3$

$y'=\underbrace{4x^2}_{\text{الاولى}}\underbrace{\overbrace{3}^{n}\overbrace{(x^2-2x)^2}^{\text{نفسها}}\overbrace{(2x-2)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}}+\underbrace{(x^2-2x)^3}_{\text{الثانية}}\underbrace{8x}_{\text{مشتقة الاولى}}$

ما يصير اتركها هيج لازم ارتبها بحيث شكو رقم. و x أقدمها.

$y'=12x^2(x^2-2x)^3(2x-2)+8x(x^2-2x)^3$

$y=\underbrace{7x^9}_{\text{متغير}}\underbrace{\sqrt[3]{x^2-4x}}_{\text{جذر}}$ = **نبسط** $=7x^9.(x^2-4x)^{\frac{1}{3}}$

$y'=\underbrace{7x^9}_{\text{الاولى}}\underbrace{\overbrace{\frac{1}{3}}^{n}\overbrace{(x^2-4x)^{\frac{-2}{3}}}^{\text{نفسها}}\overbrace{(2x-4)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}}+\underbrace{(x^2-4x)^{\frac{1}{3}}}_{\text{الثانية}}\underbrace{63x^8}_{\text{مشتقة الاولى}}$

نرتب

$y'=\frac{7}{3}x^9(x^2-4x)^{\frac{-2}{3}}(2x-4)+63x^8(x^2-4x)^{\frac{1}{3}}$

$y=(12x^2+3)(2x-2)$

$y'=\underbrace{(12x^2+3)}\underbrace{2}+\underbrace{(2x-2)}\underbrace{24x}=2(12x^2+3)+24x(2x-2)$

مسائل الملينيوم

هل تود الحصول على مليون دولار؟ بإمكانك ذلك ! طرح معهد كلاي للرياضيات في جامعة كامبردج في بريطانيا سبعة معضلات رياضية مستعصية على الحل من قبل علماء الرياضيات ومن يستطيع حل واحدة من هذه المعضلات فانه يمنح مليون دولار وهي: -

١-حدسية يانغ-ميلز المسماة فجوة الكتلة. 2-فرضية هودج للأسطح الملساء 3. معادلات نافييه-ستوكس لحركة الموائع. 4-حدسية بيرخ-داير 5-حدسية N=NP في المعلوماتية الحاسبات 6-حدسية بوانكاريه (تم حلها).

7- اعظمهن على الاطلاق حدسية ريمان لتوزيع الاعداد الأولية.

٧- مشتقة قسمة دالتين

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\text{المقام نفسه})(\text{مشتقة البسط})-[(\text{البسط نفسه})(\text{مشتقة المقام})]}{(\text{المقام})^2}$$

$$y=\frac{x-1}{x+1}\qquad y'=\frac{\overbrace{(x+1)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(1)}^{\text{مشتقة البسط}}-\overbrace{(x-1)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+1)^2}$$

$$y'=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y=\left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^3\qquad y'=\underbrace{3}_{n}\underbrace{\left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^2}_{\text{نفسه}}\underbrace{\frac{\overbrace{(x^2+3)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(2x)}^{\text{مشتقة البسط}}-\overbrace{(x^2)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{(2x)}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x^2+3)^2}}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

$$y'=3\left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^2\frac{2x^3+6x-2x^2}{(x^2+3)^2}=3\left[\frac{x^2}{x^2+3}\right]^2\frac{6x}{(x^2+3)^2}$$

$$y=\frac{5}{(x^2+4)^2}\qquad y'=\frac{\overbrace{(x^2+4)^2}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(0)}^{\text{مشتقة البسط}}-\overbrace{5}^{\text{البسط}}\ \overbrace{2(x^2+4)^1 2x}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x^2+4)^4}=\frac{-20x(x^2+4)^1}{(x^2+4)^4}=\frac{-20x}{(x^2+4)^3}$$

حالة خاصة تستخدم للجذر التربيعي فقط وفقط ومقبولة بالحل في منهج الكتاب.

$$y=\sqrt{\text{دالة معينة}}\qquad y'=\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2\times\sqrt{\text{الجذر نفسه}}}$$

$$y=\sqrt{x^2-3x}\qquad y'=\frac{2x-3}{2\times\sqrt{x^2-3x}}$$

$$y=\sqrt{1-4x}\qquad y'=\frac{-4}{2\sqrt{1-4x}}=\frac{-2}{\sqrt{1-4x}}$$

يتميز الشعب العربي بكثرة شعراءه، فهو شعب لا عقلي لا علمي وانما شعب قائم تاريخه على المدح والهجاء والتخيل والاحلام.

لغز

اشترى علي سيارة بـ10 مليون وباعها ب 12 مليون دينار ثم رجع واشتراها ب 15 مليون دينار وباعها بعد ذلك بـ16 مليون. فهل ربح علي ام خسر وكم ربح او خسر؟

مشتقات الدوال المثلثية

١-القواعد الستة: -متى تطبق؟

- تطبق عندما تكون الدالة المثلثية ذات اس =١
- غير مضروبة بمتغير او مقسومة على متغير. بحيث اذا مضروبة بمتغير نعاملها معاملة ضرب دالتين واذا مقسومة على قوس او متغير نعتبرها قسمة دالتين.
- غير مضروبة او مقسومة على دالة مثلثية واذا مضروبة او مقسومة نطبق الكلام أعلاه.

مشتقاتها	دالة مثلثية
cos(الزاوية). (مشتقة الزاوية)	sin(زاوية)
$-sin$(الزاوية). (مشتقة الزاوية)	cos(زاوية)
sec^2(الزاوية). (مشتقة الزاوية)	tan(زاوية)
$-csc^2$(الزاوية). (مشتقة الزاوية)	cot(زاوية)
sec(الزاوية)tan(زاوية). (مشتقة الزاوية)	sec(زاوية)
$-csc$(الزاوية)cot(زاوية). (مشتقة الزاوية)	csc(زاوية)

٢-القاعدة السابعة: - يطبق عندما تكون الدالة المثلثية ذات اس لا يساوي واحد (كل الأرقام الأخرى) ونصها كالتالي: -

$\frac{d}{dx}$ (دالة مثلثية لزاوية ما)^n $= n$(الدالة نفسها مع زاويتها)$^{n-1}$ (مشتقة الدالة المثلثية) (مشتقة الزاوية)

- اذا ضربت او قسمت على متغير او دالة مثلثية أخرى او قوس نستخدم ضرب او قسمة دالتين.
- بعض التحويلات المهمة والتي نحتاجها أحيانا

$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ $\qquad$ $cos^2\theta - sin^2\theta = cos2\theta$

$sin2\theta = 2sin\theta\, cos\theta$

$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$

$cot^2\theta + 1 = csc^2\theta$

$y = sinx^2 \qquad y' = cosx^2 \quad 2x = 2x\, cosx^2$

$y = csc\sqrt{x} \qquad y' = -csc\sqrt{x}\, cot\sqrt{x} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} csc\sqrt{x}\, cot\sqrt{x}$

$y = (sinx - cosx)^4 \qquad y' = \overset{n}{4}\,\overbrace{(sinx - cosx)^3}^{\text{نفسها}}\,\overbrace{(cosx + sinx)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}$

$y = cot^5 2x \rightarrow$ 7قاعدة $\rightarrow y' = 5\ \overbrace{cot^4 2x}^{\text{نفسها}}\ .\overbrace{-csc^2 2x}^{\text{مشتقة الدالة المثلثية}}\ \overbrace{2}^{\text{مشتقة الزاوية}} = \overbrace{-10cot^4 2x\, .\, csc^2 2x}^{\text{تبسيط}}$

$y = \frac{cosx}{1 + sinx} \rightarrow$ قسمة $\rightarrow y' = \frac{\overbrace{(1 + sinx)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(-sinx)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(cosx)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{cosx}^{\text{مشتقة المقام}}}{(1 + sinx)^2}$

$$y' = \frac{-sinx - sin^2x - cos^2x}{(1+sinx)^2} = \frac{-[sinx + sin^2x + cos^2x]}{(1+sinx)^2} = \frac{-[sinx+1]}{(1+sinx)^2} = \frac{-(1+sinx)}{(1+sinx)^2} = -\frac{1}{1+sinx}$$

$y = 4x^2 .(1 - 2sec^2x)^3$ ضرب

$$y' = \underbrace{4x^2}_{\text{الاولى}} \underbrace{\overset{n}{3}\overbrace{(1-2sec^2x)^2}^{\text{نفسها}}\overbrace{(0 - 4secx \ \ .secx \ \ tanx)}^{\text{مشتقة داخل القوس}}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{(1-2sec^2x)^3}_{\text{الثانية}} \underbrace{8x}_{\text{مشتقة الاولى}}$$

ما يصير اتركها هيج لازم ارتبها بحيث شكو رقم. وx أقدمها والاقواس ترجع.

$$y' = -48x^2secx\,tanx\,(1-2sec^2x)^2 + 8x(1-2sec^2x)^3$$

$y = sinx\,.tan^2x$ ضرب

$$y' = \underbrace{sinx}_{\text{الاولى}} \underbrace{\overset{n}{2}\overbrace{tanx}^{\text{نفسها}} \quad \overbrace{sec^2x}^{\text{مشتقة داخل القوس}}}_{\text{مشتقة الدالة الثانية}} + \underbrace{tan^2x}_{\text{الثانية}} \ \underbrace{cosx}_{\text{مشتقة الاولى}}$$

الاشتقاق الضمني

تسمى الدالة بصورة $(y = f(x) \rightarrow y = x^3 + x^2 - x)$ بالدالة الصريحة لكن الدالة $(y = f(x,y) \rightarrow yx + y = y^4)$ بالدالة غير الصريحة او الدالة الضمنية. ولغرض ان نشتقها نتبع: -

- -نشتق الاشتقاق العادي و كلما نشتق (y) نعاملها معاملة (x) بس لازم تخلي يمها $(\frac{dy}{dx})$ هنا الفكرة كلها . والانتباه اذا لكيت (x^ny^m) تعتبرهم مشتقة ضرب دالتين دير بالك .

$$y^n \rightarrow ny^{n-1}\,y' \qquad\qquad y \rightarrow y'$$

- -ننقل المقادير التي تحتوي مشتقة لطرف والمقادير الخالية منها لطرف اخر.
- -ناخذ المشتقة $\frac{dy}{dx}$عامل مشترك.
- نكول البعيد على القريب ونطلع المشتقة وهايهيه

$y^3x - y^2 = sinx$

$$\overbrace{y^3}^{\text{مشتقة الثانية الاولى}} \ \overbrace{1}^{} + \overbrace{x}^{\text{الثانية}} \ \overbrace{3y^2\frac{dy}{dx}}^{\text{الاولى مشتقة}} - 2y\frac{dy}{dx} = cosx$$

$$3xy^2\,y' - 2yy' = cosx - y^3 \qquad y'(3xy^2 - 2y) = cosx - y^3 \qquad y' = \frac{cosx - y^3}{(3xy^2 - 2y)}$$

$y^3 - y^2x^2 - 5y = xsiny$

نشتق $3y^2y' - [y^2 \ \ 2x + x^2 \ \ 2yy'] - 5y' = x\,cosy \ \ y' + siny \ \ 1$

نرتب ثم ننقل $3y^2y' - 2xy^2 - 2x^2y\,y' - 5y' = y'x\cos x + \sin y$

عامل مشترك $3y^2\frac{dy}{dx} - 2x^2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - x\cos x\frac{dy}{dx} = \sin y - 2xy^2$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 2x^2y - 5 - x\cos x) = \sin y - 2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y - 2xy^2}{3y^2 - 2x^2y - 5 - x\cos x}$$

$y^2 + x^2 = 25$ $\quad 2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$ $\quad 2y\frac{dy}{dx} = -2x$ $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

المشتقات العليا

تسمى المشتقات المتتابعة او التسلسل بالاشتقاق الى المشتقة المطلوبة بالمشتقات العليا .

فاذا كانت الدالة $(y = f(x))$ فان

المشتقة الاولى هي $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{df}{dx}$

المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$

والثالثة $\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^4}$

وهكذا الى ان نصل الى باقي المشتقات

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}$$

مثال ١ إذا كانت $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 2x \quad 2 = -2\sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\cos 2x \quad 2 = -4\cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4 \times -\sin 2x \quad 2 = 8\sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 8\cos 2x \quad 2 = 16\cos 2x$$

تشتق الدالة وتطلع ناتج وبعدين تشتق الناتج لحد ما توصل الى المشتقة المطلوبة

أسئلة –اثبت ان –برهن ان-بين ان –تحقق من

١-الحالة الأولى: -اذا كانت الدالة بالسؤال ضمنية ومطلوب اثبات خليط من المشتقات تساوي=مقدار. الحل يكون

- نشتق الدالة الضمنية وبدون تبسيط نشتق مرة أخرى الى ان نصل الى المشتقة المطلوبة.
- نحور الناتج النهائي بحيث نخليه يشبه خليط المشتقات ويساوي الطرف الثاني.

٢-الحالة الثانية: -الدالة ضمنية ومطلوب اثبات مشتقة معينة تساوي مقدار.

- نشتق ونبسط ثم نشتق ونبسط الى ان نصل الى المشتقة المطلوبة. ويطلع الجواب بشرط الاشتقاق صحيح.

٣-الحالة الثالثة: -الدالة صريحة بكل الأحوال الحل

- ✓ ناخذ الطرف الذي يحتوي مشتقات من السؤال.
- ✓ نجد المشتقات حسب السؤال ونبسطها.
- ✓ نعوض بالطرف الي اخذناه ولازم نثبت انها تساوي الطرف الثاني.

$y.y'$

يعتبر ضرب دالتين

مثال٢: -اذا علمت بان $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على ان $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0$ حالة ثالثة.

$y^2 + x^2 = 1$ اشتقيت ضمنيا $2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad \div 2$

$y\frac{dy}{dx} + x = 0$ نشتق مرة ثانية

$\overset{\text{الاول}}{\widehat{y}}\ \overset{\text{مشتقة الثانية}}{\widehat{\frac{d^2y}{dx^2}}} + \overset{\text{مشتقة الاول الثانية}}{\widehat{\frac{dy}{dx}}\ \widehat{\frac{dy}{dx}}} + 1 = 0 \qquad y.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$ نشتق مرة ثالثة

$\overset{\text{الاول}}{\widehat{y}}\ \overset{\text{مشتقة الثانية}}{\widehat{\frac{d^3y}{dx^3}}} + \overset{\text{الثانية}}{\widehat{\frac{d^2y}{dx^2}}}\ \overset{\text{مشتقة الاول}}{\widehat{\frac{dy}{dx}}} + \overset{n}{\widehat{2}}\overset{\text{نفسها}}{\widehat{\left(\frac{dy}{dx}\right)^1}}\ \overset{\text{مشتقة داخل القوس}}{\widehat{\frac{d^2y}{dx^2}}} = 0 \qquad y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

اثرائي: -اذا علمت بان $y = sin2x$ اثبت ان

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 16$$

$y = sin2x$

$y' = cos2x \quad 2 = 2cos2x$

$y'' = 2 \times -sin2x \quad .2 = -4sin2x$

هسه نعوض المشتقة الاولى والثانية بالطرف الايسر.

$LHS = 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

$LHS = 4(2cos2x)^2 + (-4sin2x)^2$

$LHS = 4.4\ cos^2 2x + 16\ sin^2 2x$

$LHS = 16\,cos^2 2x + 16\ sin^2 2x$

هسه ناخذ 16 عامل مشترك.

$LHS = 16(\ cos^2 2x + \ sin^2 2x)$

وعدنا قانون فيثاغورس يكول

$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

$LHS = 16(1) = 16$

و.ه.م

اثرائي: - اذا كان $x^2 + 2xy + y^2 = 4$ اثبت ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

الدالة هنا ضمنية لكن المطلوب مو خليط من المشتقات.

حالة٢

$2x + 2x\ \ y' + y\ \ 2 + 2yy' = 0$

$2x + 2x\ \ y' + y\ \ 2 + 2yy' = 0 \quad \div 2$

$x + x\ y' + y\ + yy' = 0$

هسه نترك المشتقات بجهة وننقل المقادير الى الجهة الاخرى.

$x\ \ y' + yy' = -x - y$

المشتقة عامل مشترك والسالب بالطرف الايمن همينا

$y'(x\ \ + y) = -(x + y)$

$y' = \frac{-(x+y)}{x+y} = -1$

هسه نطلع المشتقة الثانية

$y' = -1 \qquad y'' = 0$

تمارين ٣-١

١- جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي

$a)\ y = \sqrt{2-x} \quad . \forall x < 2$

$y = (2-x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad y' = \overbrace{\frac{1}{2}}^{n}\overbrace{(2-x)^{\frac{-1}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -\frac{1}{2}(2-x)^{\frac{-1}{2}}$

$y' = -\frac{1}{2} \times -\overbrace{\frac{1}{2}}^{n}\overbrace{(2-x)^{\frac{-3}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -\frac{1}{4}(2-x)^{\frac{-3}{2}}$

$b)\ y = \frac{2-x}{2+x} \quad . x \neq -2$

$y' = \frac{\overbrace{(2+x)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(-1)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(2-x)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+2)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(x+2)^2}$

$y' = \frac{\overbrace{(x+2)^2}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(0)}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(-4)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{2(x+2)}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+2)^4} = \frac{8(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{8}{(x+2)^3}$

$c)\ 2xy - 4y + 5 = 0 \quad . x \neq 2 \quad . y \neq 0$

$\overbrace{2x}^{\text{الاول}}\ \overbrace{\frac{dy}{dx}}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{y}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{2}^{\text{مشتقة الاول}} - 4\frac{dy}{dx} + 0 = 0$ $\qquad 2xy' + 2y - 4y' = 0 \quad \div 2$

$xy' + y - 2y' = 0$ $\qquad xy' - 2y' = -y$ $\qquad y'(x-2) = -y$ $\qquad y' = \frac{-y}{x-2}$

$y'' = \frac{\overbrace{(x-2)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(-y')}^{\text{مشتقة البسط}} - \overbrace{(-y)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{(1)}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x-2)^2} = \frac{(x-2) \times -y' + y}{(x-2)^2}$

ملاحظة: -اذا مطلوب منك إيجاد مشتقة معينة مثلا مطلوب مشتقة ثانية وطلع بالجواب مالتها مشتقة أولى وياها. لازم نرفع المشتقة الأولى ونخلي فقط المشتقة المطلوبة مني بالسؤال. بحيث نعوض قيمة المشتقة الأولى بالناتج النهائي.

$= \frac{(x-2) \times -\left(\frac{-y}{x-2}\right) + y}{(x-2)^2}$

$y'' = \frac{y+y}{(x-2)^2} = \frac{2y}{(x-2)^2}$

نادرا ما يوجد أناس لا ينتابهم الخجل من كونهم احبوا بعضهم بعض بعد ان يكفوا عن الحب. فرانسوا

٢-جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي $a)\ f(x) = 4\sqrt{6-2x}\ .\quad \forall x < 3$

هنا يقصد اوجد المشتقة الثالثة وبعدين عوض بالناتج مالتها مكان كل x=1 وطلع الناتج النهائي.

$y = 4(6-2x)^{\frac{1}{2}}$ $y' = 4 \times \overbrace{\tfrac{1}{2}}^{n}\overbrace{(6-2x)^{\frac{-1}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-2}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -4(6-2x)^{\frac{-1}{2}}$

$y'' = -4 \times -\overbrace{\tfrac{1}{2}}^{n}\overbrace{(6-2x)^{\frac{-3}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-2}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -4(6-2x)^{\frac{-3}{2}}$

$y''' = -4 \times -\overbrace{\tfrac{3}{2}}^{n}\overbrace{(6-2x)^{\frac{-5}{2}}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-2}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = -12(6-2x)^{\frac{-5}{2}}$

هسه نعوض مكان كل x=1

$y''' = -12(6-2.1)^{\frac{-5}{2}} = -12(4)^{\frac{-5}{2}} = -12(2^2)^{\frac{-5}{2}} = \frac{-12}{2^5} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$

٢-جد $f'''(1)$ $b)\ f(x) = \sin\pi x$

$f'(x) = \cos\pi x \quad \pi = \pi\cos\pi x$

$f''(x) = \pi\,(-\sin\pi x)\quad \pi = -\pi^2\sin\pi x$

$f'''(x) = -\pi^2\cos\pi x \quad \pi = -\pi^3\cos\pi x$

هسه نعوض مكان x.

$f'''(1) = -\pi^3\cos\pi(1) = -\pi^3\cos\pi = -\pi^3\,(-1) = \pi^3$

٢-جد $f'''(1)$ $b)\ f(x) = \frac{3}{2-x}$

$y = \frac{3}{(2-x)} = 3(2-x)^{-1}$ $y' = -3\,\overbrace{(2-x)^{-2}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 3(2-x)^{-2}$

$y'' = 3 \times -\overbrace{2}^{n}\overbrace{(2-x)^{-3}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 6(2-x)^{-3}$

$y''' = 6 \times -\overbrace{3}^{n}\overbrace{(2-x)^{-4}}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{-1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 18(2-x)^{-4}$

هسه نعوض مكان كل x=1

$y''' = 18(2-1)^{-4} = 18(1)^{-4} = 18\,.\,1 = 18$

كتاب-وزاري اذا كانت y=tanx فبرهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ حيث ان $\forall n \in . x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$

الدالة هنا صريحة ومطلوب اثبات المشتقة الثانية تساوي مقدار. يعني لازم نطلع المشتقة الثانية ونشوف الناتج مالتها.

$y = tanx$ نشتق ← دالة $y' = sec^2x$

نشتق المشتقة الثانية حسب قاعدة القوس.

$$y'' = \overset{n}{2}\,\overbrace{sec^1x}^{\text{نفسها}} \times \overbrace{secx\,.\,tanx\quad.1}^{\text{مشتقة داخل القوس}} = 2\,secx\,secx\,tanx = 2sec^2x\,tanx$$

هسه لازم نحور بالمشتقة الثانية حتى يطلع الجواب مثل ما موجود. شكو مقدار موجود بالمشتقة وما موجود بالناتج مالت السؤال. اذن لازم نحذفه ونخلي مكانه ما يساوي.

$sec^2x = 1 + tan^2x$ قانون $y = tanx$ موجود بالسؤال

$y'' = 2sec^2x\,tanx = 2tanx\,(1+tan^2x) = 2y(1+y^2)$ و. ه. م

٤-اذا كانت $y = x\,sinx$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + 4cosx = 0$

هسه ناخذ الطرف الايسر ونطلع المشتقة الرابعة مثلما موجود بالسؤال.

$$LHS = y'''' - y + 4cosx$$

$y = x\,sinx$ ضرب دالتين

$$y' = \overbrace{x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{cosx}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{sinx}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة الاولى}} = \overbrace{x\,cosx}^{\text{ضرب دالتين}} + sinx$$ نطلع المشتقة الثانية

$$y'' = \overbrace{x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{-sinx}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{cosx}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة الاولى}} + cosx = -x\,sinx + cosx + cosx$$

$$= -\overbrace{x\,sinx}^{\text{ضرب دالتين}} + 2cosx$$

$$y''' = \overbrace{-x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{cosx}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{sinx}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{-1}^{\text{مشتقة الاولى}} + 2 \times -sinx$$

$$= -x\,cosx - sinx - 2sinx = -\overbrace{x\,cosx}^{\text{ضرب دالتين}} - 3sinx$$

$$y'''' = \overbrace{-x}^{\text{الاولى}}\ \overbrace{-sinx}^{\text{مشتقة الثانية}} + \overbrace{cosx}^{\text{الثانية}}\ \overbrace{-1}^{\text{مشتقة الاولى}} - 3 \times cosx = x\,sinx - cosx - 3cosx = xsinx - 4cosx$$

$$LHS = y'''' - y + 4cosx$$

هسه نعوض مكان كل مقدار قيمته حسب الطرف الايسر. ثم نختصر المتشابه بالمقدار ومختلف بالإشارة.

$$LHS = y'''' - y + 4cosx$$

$$LHS = xsinx - 4cosx - x\,sinx + 4cosx = 0$$



المعدلات المرتبطة بالزمن

هنالك أشياء تتغير بمرور الزمن بحيث في تغيرها تعتمد على متغير واحد. فلو صب ماء في أسطوانة فان كمية الماء (حجم الماء) وارتفاعه يزيدان وهذان المتغيران يعتمدان كلاهما على تغير الوقت. أي بمعنى انها عوامل تتغير اعتمادا على الزمن. ولحل هكذا مسائل سنتبع الشرح التالي.

- **الخطوة الأولى: -** ارسم رسم توضيحي للشكل الي مذكور بالسؤال.
- **الخطوة الثانية: -** اكتب الفرضية واترك مجال فد ثلاثة أسطر. بعدين ترجع عليه تأخذ الفرضية من رموز العلاقة أفضل.
- **الخطوة الثالثة: -** اكتب العلاقة الرئيسية وسوف أقوم بشرح العلاقات بالتفصيل حسب الحالة فيما بعد.
- توضيح كلش مهم: - اسال نفسك كول يأبه العلاقة شنو الرموز الي راح تتغير بيها إذا مر الوقت ومع ذلك انا راح أوضح هذا الشيء بالتفصيل ولازم نحدد الي يبقى ثابت همينا.

لازم تفهم هذا الشيء لازم

اذا كان عدد المتغيرات نسبة للزمن في المسالة

عدد المتغيرات مع الزمن اثنين	عدد المتغيرات مع الزمن ثلاثة	
اذا العلاقة الرئيسية بيها متغيرين اثنين مع الزمن فقط هنا نشتق مباشر نسبة للزمن	اذا ثلاثة متغيرات بس منطي المعدل الزمني لتغير اثنين والثالث طالبه بالسؤال هنا بهيج حالة نشتق نسبة الى الزمن ماكو اشكال	اذا ثلاثة متغيرات مع الزمن ومنطي المعدل الزمني لتغير واحد من المتغيرات وطالب المعدل الزمني لتغير اخر. اما الثالث رغم انه متغير مع الزمن وموجود بالعلاقة لكن ما طالبه ولا منطي معدل تغيره الزمني. هنا شنو نسوي؟ لازم نوجد علاقة ثانوية نرفع بيها المتغير الي ما مطلوب وتبقى العلاقة شرط بين المطلوب والمعطى بالسؤال.

- ملاحظة مهمة هاي تسويها تعويذة وتخليها بأيدك وتكول هاي التميمة

(((كل مقدار ثابت مع مرور الزمن وقيمته معلومة تعوض قيمته بالعلاقة قبل الاشتقاق. وكل مقدار متغير مع مرور الزمن اياك ثم اياك ان تتطاول وتعوض قيمته قبل الاشتقاق وانما يتعوض بعد الاشتقاق دائما)))

- **الخطوة الرابعة: -الاشتقاق** نشتق العلاقة الرئيسية نسبة للزمن بحيث كل متغير نشتقه لازم نضع قربه مشتقته نسبة للزمن.

كلشيء نشتقه هنا نخلي مشتقته للزمن يمه مثل

$$x^2 \to 2x\,\frac{dx}{dt}$$

$$v \to \frac{dv}{dt}$$

$$h^4 \to 4h^3\,\frac{dh}{dt}$$

❖ **بعض الأحيان** بعد الاشتقاق تطلع بالمعادلة مجاهيل ثانوية غير المجهول المطلوب مني بالسؤال شنو نسوي؟

نرجع للعلاقة الرئيسية قبل الاشتقاق نعوض فيها كل المعلومات ونوجد المجهول الثانوي.	او ينطي معلومة بالسؤال نستفاد منها نطلع المجهول الثانوي او نطلع معادلة منه.

❖ كل تغير (يقل -يصغر-يقترب-يذوب-يتسرب) فان قيمة معدل التغير=سالب. وكل تغير(يكبر-يزداد-يبتعد) فان قيمة التغير=موجب.

❖ **الخطوة الأخيرة:-** تعويض كافة المقادير وإيجاد قيمة المجهول الرئيسي المطلوب.

كل رقم بالسؤال وحداته

m^3, cm^3 →→→ حجم

m^2, cm^2 →→→ مساحة

$\mathrm{m}, cm. km$ →→→ لو مسافة لو بعد لو طول لو عرض لو ارتفاع

$\frac{cm^3}{s}$ = يمثل = $\frac{dv}{dt}$

$\frac{\mathrm{m}^2, cm^2}{h.m.s}$ = يمثل = $\frac{dA}{dt}$

$\frac{\mathrm{m.cm}}{h.m.s}$ → يمثل →= $\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$

المحيط والمساحة للأشكال الثنائية الابعاد

الشكل	المحيط	المساحة
المربع	$p = 4 \times$ طول الضلع	$A = (\text{طول الضلع})^2 = X^2$
المستطيل	$p = 2(\text{الطول} + \text{العرض})$ $p = 2(X+Y)$	$A = \text{الطول} \times \text{العرض}$ $A = X \times Y$
المثلث	$P =$ مجموعة اطوال اضلاعه الثلاثة	$A = \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$ $A = \frac{1}{2} \times B \times H$
الدائرة	$P = 2\pi.R$	$A = \pi R^2$

المساحات الكلية والجانبية والحجوم للأشكال المجسمة

الشكل	الحجم	المساحة الكلية	المساحة الجانبية
المكعب	$V = (\text{طول الضلع})^3$ $V = X^3$	$A = 6 \times$ مساحة وجه $A = 6 \times X^2$	$A = 4 \times$ مساحة وجه $A = 4 \times X^2$
متوازي سطوح مستطيلة	$V =$ الطول $\times$ العرض $\times$ الارتفاع $V = X \times Y \times h$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $+ 2 \times$ مساحة القاعدة $A = 2(X+Y) \times h + 2.x.y$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $A = 2(X+Y) \times h$
المخروط	$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$	غير مهمة	غير مهمة
الاسطوانة	$v = \pi r^2 h$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $+ 2 \times$ مساحة القاعدة $A = 2\pi r \times h + 2.\pi r^2$	$A =$ محيط القاعدة $\times$ الارتفاع $A = 2\pi r \times h$
الكرة	$v = \frac{4\pi}{3} r^3$	$A = 4\pi r^2$	لا يوجد

التعلق العاطفي بالفكرة يُعميك عن سلبياتها، ترى حتى بشاعتها نوعًا من الفضيلة....!!

مسائل مثلث فيثاغورس

١-مسائل السلم: - العلاقة الرئيسية

- اذا مطلوب معدل تغير ضلع نستخدم قانون فيثاغورس $x^2 + y^2 = s^2$
  طول السلم ثابت (الوتر) ويتغير الطرف الأعلى والاسفل والعلاقة ما تحتاج علاقة ثانوية
- اما اذا طلب معدل تغير زاوية نستخدم قانون sin,cos.

٢-مسائل سيارتين تبتعد كل منهما عن الأخرى بشكل متعامد: - العلاقة $x^2 + y^2 = s^2$ هنا تكون لدينا ٣ متغيرات

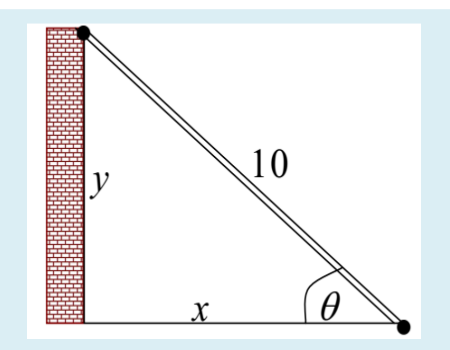
والاغلب ينطي معدل تغير اثنين ويطلب الثالث لذلك نشتق مباشر. ونستخدم قانون السرعة $=\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ يفيدنا.

٣-بعض المسائل تشكل مثلث فيثاغوس مثل سؤال طائرة تحلق او سيارة تجتاز إشارة مرور او صقر يطير من على شجرة لازم تعرف المقدار الثابت حتى تعوض مقداره قبل الاشتقاق.

مثال-٤-:-سلم طوله ١٠ m يستند طرفه الأسفل على ارض افقية وطرفه العلوي على حائط رأسي، فاذا انزلق الطرف الأسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2m/s عندما يكون الطرف الأسفل على بعد 8m عن الحائط جد: -

- ✓ معدل انزلاق الطرف العلوي
- ✓ سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.

(تحليل السؤال: - منين نبدي؟ الشكل الي تكون عدنا هو مثلث قائم الزاوية ومطلوب معدل تغير بعد الطرف العلوي –الضلع القائم – اذن مبرهنة فيثاغورس نستخدمها).



الفرضية: -

نفرض بعد الطرف الاسفل عن الحائط = X =8m معدل تغيره (ابتعاده) $=\frac{dx}{dt} = 2m/s$

نفرض بعد الطرف الاعلى عن الارض = y معدل تغيره (نزوله) = $=\frac{dy}{dt} = ?$

نفرض الزاوية بين السلم والارض =θ معدل تغيرها $=\frac{d\theta}{dt}?$

العلاقة: -

$x^2 + y^2 = l^2$

(اذا السلم انزلق من الاسفل راح ينزل من الاعلى –يتغير-كذلك يتغير بعده من الأسفل عن الحائط وتغير بعد طرفه العلوي عن الأرض بس طول السلم يبقى ثابت معليه. يعني متغيرين اثنين فقط. اذن ننتقل للاشتقاق بس قبل الاشتقاق راح اعوض طول الدرج لان ثابت).

$x^2 + y^2 = 10^2 \qquad x^2 + y^2 = 100$

الاشتقاق: -

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \div 2 \qquad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$

حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي عندي اكو مجهول ثاني الي هو قيمة y نرجع نوجدها من العلاقة قبل الاشتقاق.

$x^2 + y^2 = 100 \qquad 8^2 + y^2 = 100 \qquad y^2 = 100 - 64 \qquad y^2 = 36 \qquad y = 6\,m$

التعويض:-

$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$ $\quad 8.2+6\frac{dy}{dt}=0$ $\quad 16+6\frac{dy}{dt}=0$ $\quad 6\frac{dy}{dt}=-16$

$\frac{dy}{dt}=\frac{-16}{6}=\frac{-8}{3}\frac{cm}{s}$

العلاقة: - (حتى نطلع معدل تغير الزاوية)

$\sin\theta=\frac{y}{10}$ $\quad y=10\sin\theta$

إذا انزلاق السلم فان الزاوية تقل لما تصير صفر والارتفاع كذلك. يعني اثنين متغير. اذن نشتق.

الاشتقاق:-

$\frac{dy}{dt}=10\ \cos\theta\ \frac{d\theta}{dt}$

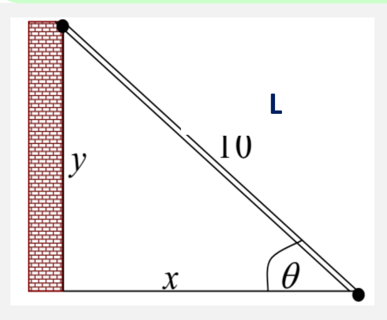
(حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي الي هو معدل تغير الزاوية لازم اطلع قيمة $\cos\theta$)

$\cos\theta=\frac{x}{10}=\frac{8}{10}$

التعويض:-

$-\frac{8}{3}=10\ \frac{8}{10}\ \frac{d\theta}{dt}$ $\quad \frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{3}\ \frac{rad}{s}$

تمارين-وزاري: -سلم يستند طرفه الأسفل على ارض افقية وطرفه العلوي على حائط رأسي، فاذا انزلق الطرف الأسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2m/s، جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$



(تحليل السؤال: - منين نبدي؟ الشكل الي تكون عدنا هو مثلث قائم الزاوية اذن مبرهنة فيثاغورس نستخدمها).

الفرضية:- نفرض بعد الطرف الاسفل عن الحائط = X معدل تغيره (ابتعاده) = $\frac{dx}{dt}=+2$

نفرض بعد الطرف الاعلى عن الارض = y معدل تغيره (نزوله) = = $\frac{dy}{dt}=?$

العلاقة:- $x^2+y^2=l^2$

(متغيرين اثنين فقط. لان اذا السلم انسحب من الاسفل راح ينزل من الاعلى بس طول السلم يبقى ثابت معليه فمن نشتقه نعامله معاملة رقم يعني مشتقته = صفر حتى لو ما معلوم).

الاشتقاق:-

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \quad \div 2$ $\quad x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \quad ---1$



حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي عندي اكو مجهول ثاني وثالث الي هو قيمة x , y . وحتى لو ارجع للعلاقة قبل الاشتقاق همينا ما تفيدني لان كلهم مجاهيل. جا وين نروح؟ نستفاد من معلومة الزاوية.

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x} \qquad \sqrt{3}=\frac{y}{x} \qquad y=\sqrt{3}x \quad ---------2$$

نعوض في معادلة 1.

التعويض:-

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0 \qquad x.2+\sqrt{3}x\,\frac{dy}{dt}=0 \qquad 2x+\sqrt{3}\;x\frac{dy}{dt}=0 \qquad \div x$$

$$2+\sqrt{3}\;\frac{dy}{dt}=0 \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{-2}{\sqrt{3}}\frac{cm}{s}$$

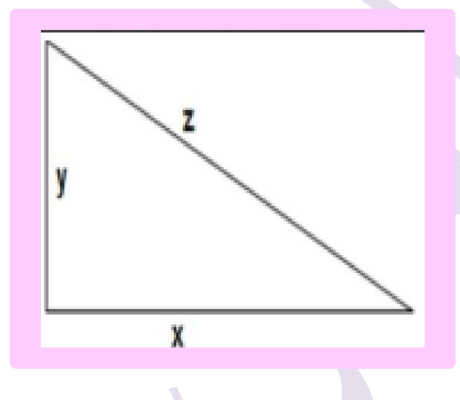
ملحوظة مهمة:-

١-لا يجوز في الرياضيات قسمة اي معادلة على مقدار مجهول مثل (x) لان ممكن قيمة المجهول =صفر ولا تجوز القسمة على صفر بس هنا قسمت على X. لان تمثل طول والطول مستحيل يصير صفر لذلك يصير اقسم.

٢-استخدمت علاقة tan لان تربط x ,y ولو مستخدم غيرها الحل يصير اطول واصعب لان طول الدرج يدخل بالموضوع وتنلاص.

س\\٢٠٠٩د١\\\\ طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة 80km\h و تسير سيارة على الطريق الاخر بسرعة 60km\h جد معدل ابتعاد السيارتين عن بعضهما بعد مرور ربع ساعة .

تحليل السؤال: - طريقين واحد عمودي على الاخر وكلما تبتعد السيارتين عن نقطة الانطلاق مالتهم راح يزداد بعد كل سيارة عن نقطة الانطلاق ويزداد بعد السيارتين عن بعضهم .يعني راح يتكون مثلث والوتر مالته البعد بين السيارتين .



الفرضية: - بعد ربع ساعة من الانطلاق.

البعد السيارة الاولى عن نقطة الانطلاق =x ومعدل تغيره= $\frac{dx}{dt}=80\frac{km}{h}$

البعد السيارة الثانية عن نقطة الانطلاق =y ومعدل تغيره= $\frac{dy}{dt}=60\frac{km}{h}$



البعد بين السيارتين =z معدل تغير البعد بين السيارتين = $\frac{dz}{dt}$?

العلاقة:- $x^2+y^2=z^2$

(هنا عدنا 3 متغيرات ليش؟ لان اذا انطلقن السيارتين من نقطة معينة. مثلا وحدة راحت للشمال ووحدة للشرق لان عمودي راح يتغير بعد كل سيارة عن نقطة الانطلاق بمرور الوقت. وبعدين البعد بين السيارتين راح يتغير لان كلما يمشون راح تكبر المسافة بينهم منا لما ولا واحد يشوف الثاني. عدنا 3 متغيرات بس منطي معدل تغير اثنين وطالب الثالث يعني نشتق كبل.)

الاشتقاق:-

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2z\frac{dz}{dt} \quad \div 2 \qquad x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=z\frac{dz}{dt}$$

حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي عندي اكو مجهول ثاني وثالث الي هو قيمة x , y , z . وحتى لو ارجع للعلاقة قبل الاشتقاق همينا ما تفيدني لان كلهم مجاهيل. جا وين نروح؟ نستفاد من معلومة الوقت الي منطيها وهاي معلومة فيزيائية .

السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ المسافة = السرعة . الزمن

وراح نطبق هذا القانون على السيارة الاولى والثانية.

بعد السيارة الاولى عن نقطة الانطلاق بعد مرور ربع ساعة = سرعتها . الزمن.

$$x = 80\frac{km}{h} \quad \times \frac{1}{4}h = 20\ km$$

بعد السيارة الثانية عن نقطة الانطلاق بعد مرور ربع ساعة = سرعتها . الزمن.

$$y = 60\frac{km}{h} \quad \times \frac{1}{4}h = 15\ km$$

مادام صارن عندي قيم x, y نطبق قانون فيثاغورس ونطلع z

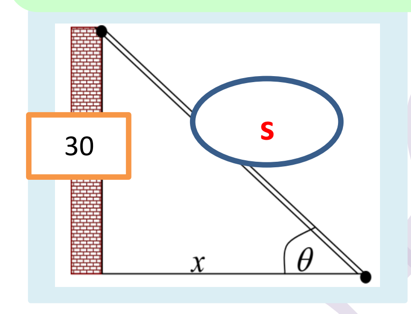
$20^2 + 15^2 = z^2$ $\quad z^2 = 400 + 225 = 625$ $\quad z = 25km$

التعويض:-

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt}$ $\quad 20.80 + 15.60 = 25\frac{dz}{dt}$ $\quad 1600 + 900 = 25\frac{dz}{dt}$

$2500 = 25\frac{dz}{dt} \quad \div 25$ $\quad \frac{dz}{dt} = 100\ \frac{cm}{s}$

٢٠١٧-د٣: -وقف صقر على قمة شجرة ارتفاعها 30m ،لاحظ على الأرض ارنب، فطار نحوه بسرعة $(80m/s)$



الفرضية:- نفرض بعد الارنب عن الشجرة= X معدل تغيره = $\frac{dx}{dt} = ?$

نفرض بعد الصقر عن الارنب = s معدل تغيره (نزوله) = $\frac{ds}{dt} = \frac{80m}{s}$

العلاقة:- $x^2 + 30^2 = s^2$

(متغيرين اثنين فقط .البعد بين الارنب والشجرة يتغير والبعد بين الصقر والارنب اما طول الشجرة فثابت لذلك عوضته.)

الاشتقاق:-

$2x\frac{dx}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} \quad \div 2$ $\quad x\frac{dx}{dt} = s\frac{ds}{dt} \quad ---1$

حتى انتقل للتعويض واطلع المجهول الرئيسي عندي اكو مجهول الي هو قيمة s . ارجع للعلاقة قبل الاشتقاق

$40^2 + 900 = s^2$ $\quad s^2 = 900 + 1600 = 2500$ $\quad s = 50m$

نعوض في معادلة 1 .

التعويض:-

$$\frac{dx}{dt} = 100\frac{m}{s} \qquad 40\frac{dx}{dt} = 50.80 \qquad x\frac{dx}{dt} = s\frac{ds}{dt}$$

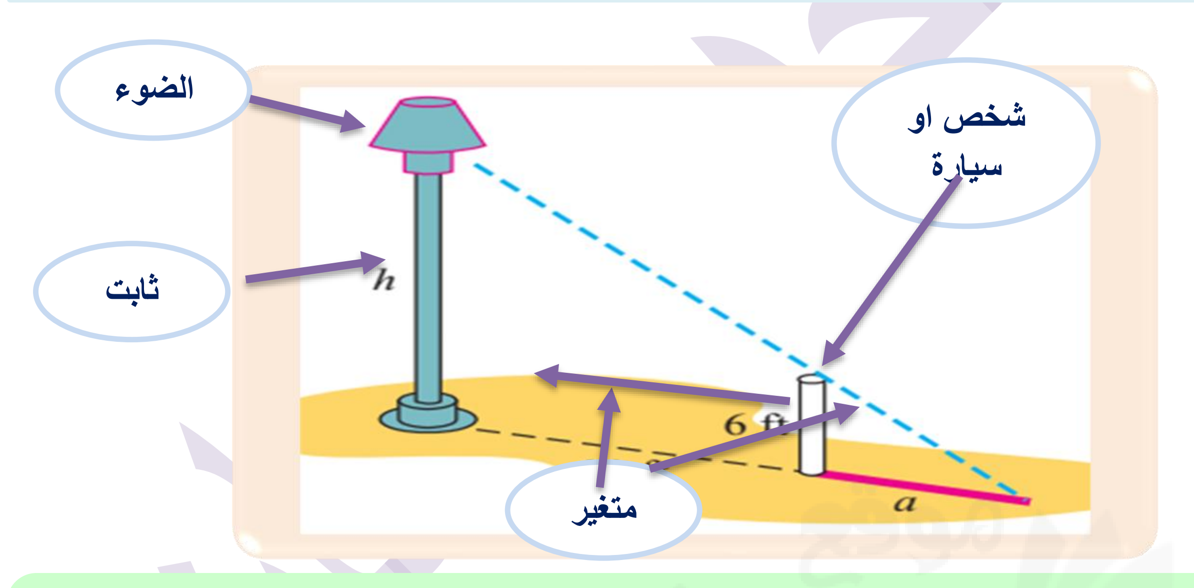
مسائل تشابه مثلثات

-اذا شخص-حادلة-سفينة-سيارة متحرك يبتعد او يقترب من مصدر ضوء سواء كان الضوء معلق بعمود عالي او موضوع على الأرض فان العلاقة تشابه مثلثات

$$tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\text{طول الشخص}}{\text{بعده عن رأس المثلث}} = \frac{\text{ارتفاع العمود}}{\text{بعد العمود عن رأس المثلث}}$$

وبهاي الحالة اذا المصدر الضوء على العمود يتغير بعد الشخص عن العمود و راس المثلث عن الشخص.

اما اذا المصدر على الأرض يتغير كل من ارتفاع ظل الرجل على العمود(الجدار) ويتغير بعد الشخص عن الجدار وعن المصدر الى موجود على الأرض.



٢٠١٦-د١-تمارين: -عمود طوله 7.2m في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله 1.8m مبتعدا عن العمود بسرعة 30m/min جد معدل تغير طول ظل الرجل.

(ما دام تكون مثلث بداخله مثلث يعني العلاقة علاقة $tan\theta$ ونطبق هاي القاعدة على كل مثلث الصغير والكبير اثنينهم).

الفرضية:- نفرض بعد الرجل عن العمود =X معدل تغيره= $\frac{dX}{dt} = 30\ \frac{m}{min}$.

طول ظل الرجل =y معدل تغيره=? $\frac{dy}{dt}$

العلاقة:-



$$\tan\theta = \text{مثلث صغير} = \frac{1.8}{y} = \text{مثلث كبير} = \frac{7.2}{x+y}$$

(الدالة بيها اثنين متغير فقط يعني يصير نشتق. بس هيج تصير المشتقة قسمة دالتين وحتى نتجنب قسمة الدالتين نبسط الدالة باختصار البسط مع البسط ثم وسطين في طرفين).

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{x+y} \qquad x + y = 4y \qquad x = 3y$$

الاشتقاق:-

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$$

التعويض:-

$$30 = 3\frac{dy}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{30}{3} = 10\frac{m}{min}$$

٢٠١٦-د٢-خارج: -فنار ميناء ارتفاعه 20m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها ٥m مبتعدة عن الفنار بسرعة 50km/h جد معدل تغير طول ظل السفينة على سطح البحر.

(ما دام تكون مثلث بداخله مثلث يعني العلاقة علاقة $\tan\theta$ ونطبق هاي القاعدة على كل مثلث



الصغير والكبير اثنينهم).

20
٥
x
y

الفرضية :- نفرض بعد السفينة عن الفنار=X معدل تغيره= $\frac{dX}{dt} = 50\,\frac{km}{h}$.

طول ظل السفينة=y معدل تغيره=؟ $\frac{dy}{dt}$

العلاقة:-

$$\tan\theta = \text{مثلث صغير} = \frac{5}{y} = \text{مثلث كبير} = \frac{20}{x+y}$$

(الدالة بيها اثنين متغير فقط يعني يصير نشتق. لكن حتى نتجنب قسمة الدالتين نبسط الدالة باختصار البسط مع البسط ثم وسطين في طرفين).

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{x+y} \qquad x + y = 4y \qquad x = 3y$$

الاشتقاق:-

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$$

التعويض:-

$$30 = 3\frac{dy}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{50}{3}\frac{Km}{h}$$

٢٠١٧\\\د٢\\\الاحيائي \\\ مصدر ضوئي موضوع على الارض يبعد 20m عن حائط. تسير حادلة تبليط ارتفاعها 1.6m بسرعة 2.5 m\min ،ما معدل التغير في ارتفاع ظل الحادلة عندما تبعد 8m عن الحائط ؟ وهل الارتفاع للظل يزداد ام يتناقص ؟

ما دام تكون مثلث بداخله مثلث يعني العلاقة علاقة $tan\theta$ ونطبق هاي القاعدة على كل مثلث الصغير والكبير اثنينهم).



الفرضية :- نفرض بعد الحادلة عن مصدر الضوء =X

معدل تغيره= $\frac{dX}{dt} = 2.5\ \frac{m}{min}$.

طول ظل الحادلة =y معدل تغيره ؟ $\frac{dy}{dt} =$

العلاقة:-

$$tan\theta = \text{مثلث صغير} = \frac{1.6}{x} = \text{مثلث كبير} = \frac{y}{20}$$

(الدالة بيها اثنين متغير فقط يعني يصير نشتق. بس هيج تصير المشتقة قسمة دالتين وحتى نتجنب قسمة الدالتين نبسط الدالة. وسطين في طرفين).

$$xy = 32$$

الاشتقاق:-

$$x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

نطلع قيمة x,y حتى من نعوض بس المجهول الرئيسي يبقى . نرجع للعلاقة قبل الاشتقاق.

$x = 20 - 8 = 12m$ ثم نعوض العلاقة $12y = 32$ $y = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}\ m$

التعويض:-

$$12\frac{dy}{dt} + \frac{8}{3} \times 2.5 = 0 \qquad 12\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3} \times \frac{5}{2}$$

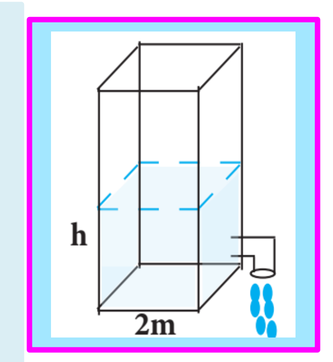
$$12\frac{dy}{dt} = -\frac{20}{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{20}{12 \times 3} = -\frac{5}{9}\ \frac{m}{min}$$

أشياء عربية

- ❖ الأرقام (1,2,...) التي نستعملها الان هي ليست إنكليزية ، وانما ارقام عربية اما (١,٢...) فهي هندية.
- ❖ كلمة صفر = zeroهي عربية بعد ان نقلها الاوربيين من الرياضيتين العرب.
- ❖ رمز x ماخوذ من (xie) اي بمعنى شيء مجهول بعد ان ترجمها الاسبان الى اللغات الاوربية .

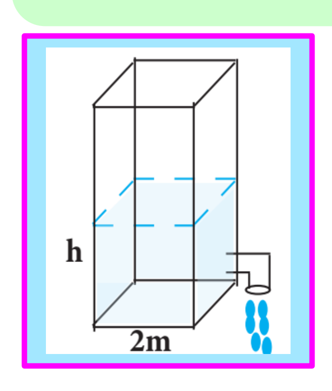
مسائل الاشكال الهندسية



متوازي السطوح المستطيلة

- الحالة الأولى: -اذا يصب فيه او يتسرب منه سائل مثل الأسطوانة يتغير فيه الارتفاع والحجم والمساحة الجانبية. اما طول القاعدة والعرض يبقى ثابت مهما نزل او ارتفاع السائل. واغلب الأسئلة على الحجم.
- الحالة الثانية: - اما اذا كال متوازي سطوح تتغير ابعاده هنا نعتمد على السؤال نشوف منو متغير بالسؤال والاغلب كلهن. اذا معطى معدل اثنين وطالب ثالث نشتق، واذا معطى معدل واحد وطالب ثاني واكو متغير ثالث لا معطى ولا مطلوب معدل تغيره هذا لازم نرفعه بعلاقة ثانوية.

٢٠١٣-د٢-تمارين:خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\frac{m^3}{h}$، جد معدل انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t.



[تحليلنا للسؤال نرسم الشكل ونخلي عليه طول وعرض القاعدة متساوين لان كايل مربعة.

ومنطيني بالسؤال ماء يتسرب بمعدل تغير الحجم وعرفته من خلال الوحدات اذن العلاقة

نكتب علاقة حجم متوازي السطوح المستطيلة].

الفرضية: -

حجم الماء في الخزان =V معدل تغيره $=\frac{dV}{dt}=-0.4\ \frac{m^3}{h}$ (خليت اشارة سالب لان يتسرب).

طول القاعدة = العرض =x (لان مربعة) (وهي ثابتة ما تتغير اذا نزل الماء من الخزان).

ارتفاع الماء في الخزان =h معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان $=\frac{dh}{dt}$ (وهذا المطلوب مني)

العلاقة: - حجم متوازي السطوح المستطيلة.

$v =$ الطول. العرض. الارتفاع $= x.x.h$

[اذا تسرب الماء راح ينخفض ارتفاع الماء ويقل حجم الماء فقط. اما طول وعرض القاعدة مالت الماء يبقى نفسه حتى لو نزل الماء.
اذن متغيرين اثنين. وراح اعوض الطول والعرض لان ثوابت مع مرور الزمن].

$$v = 2.2.h = 4h$$

الاشتقاق: -

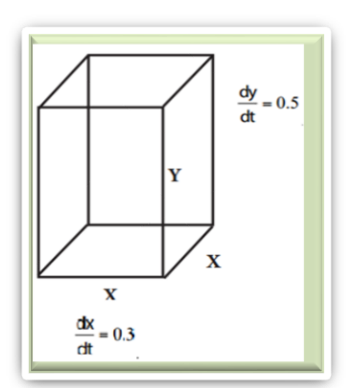
$$\frac{dV}{dt} = 4\ \frac{dh}{dt}$$

التعويض: -

$$-0.4 = 4\ \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{0.4}{4} = -0.1\ \frac{m}{h}$$

٢٠١٨-د٢: متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل. يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3\,\frac{cm}{s}$ وارتفاعه يتناقص بمعدل $0.5\,\frac{cm}{s}$. جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة ٤ cm والارتفاع 3cm.



[تحليلنا للسؤال – هذا السؤال يخص الحالة الثانية -نرسم الشكل ونخلي عليه طول وعرض القاعدة متساوين لان كايل مربعة.

وطالب بالسؤال معدل تغير الحجم اذن العلاقة نكتب علاقة حجم متوازي السطوح المستطيلة].

الفرضية:-

حجم متوازي السطوح =V معدل تغيره= $\frac{dV}{dt}$ ؟

طول القاعدة = العرض =x= 4 cm (لان مربعة) ومعدل تغيرها (معطى) =$\frac{dx}{dt} = 0.3\,\frac{cm}{s}$

ارتفاع متوازي السطوح =h= 3 cm معدل تغير الارتفاع =$\frac{dh}{dt} = -0.5$ (بالسؤال الارتفاع يكول يتناقص).

العلاقة:- حجم متوازي السطوح المستطيلة.

(مشتقة ضرب دالتين) $v = x.x.h = x^2\,h$

هسه نحدد المقادير الي تتغير بمرور الوقت والي همه الحجم (لان مطلوب تغيره) وطول القاعدة يزداد والارتفاع يقل

-٣ متغيرات- بس معطى معدل تغير اثنين ومطلوب الثالث الي هو الحجم اذن ماكو اشكال نشتق.

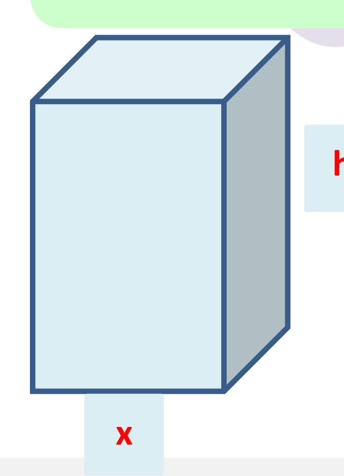
الاشتقاق:-

$$\frac{dV}{dt} = x^2\,\frac{dh}{dt} + 2h\,.\,x\,\frac{dx}{dt}$$

التعويض:-

$$\frac{dV}{dt} = 4^2\,(-0.5) + 2.3\,.4.(0.3) = -16\,\frac{1}{2} + 7.2 = -8 + 7.2 = -(8.0 - 7.2) = -0.8\,\frac{cm^3}{s}$$

٢٠١٦ د١خارج-العراق: -متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته. يتمدد بالحرارة جد معدل تغير حجمه ومساحته السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة 8m ومعدل تغير طول القاعدة $\frac{1}{4}\,\frac{m}{s}$



تحليل السؤال: - هنا مو موضوع يصب سائل، لذلك هنا التغير حسب السؤال – وكايل يتمدد بالحرارة واكيد التمدد يصير بكل ابعاد الجسم.

مطلوب تغير حجم وكذلك مساحة سطحية يعني مطلبين مو مطلب واحد.

الفرضية:-

حجم متوازي السطوح =V معدل تغيره= $\frac{dV}{dt}$ ؟

حجم متوازي السطوح =A   معدل تغيره $=\frac{dA}{dt}$ ؟

طول القاعدة = العرض =x=8 cm (لان مربعة) ومعدل تغيرها (معطى) $=\frac{dx}{dt}=\frac{cm}{s}\ \frac{1}{4}$

ارتفاع متوازي السطوح =h=3x (هنا منطي الارتفاع =٣ أمثال طول القاعدة لذلك استفاد من هاي المعلومة اقلل عدد المتغيرات بالعلاقة الى اثنين فقط واحذف h).

1-العلاقة:- حجم متوازي السطوح المستطيلة.

$v=3x^3$ $v=x.x.h=x^2\,3x=3x^3$

الاشتقاق:-

$$\frac{dV}{dt}=9x^2\,\frac{dx}{dt}$$

التعويض:-

$$\frac{dV}{dt}=9.8^2\left(\frac{1}{4}\right)=9.64.\frac{1}{4}=144\,\frac{cm^3}{s}$$

٢-العلاقة:- مساحة متوازي السطوح المستطيلة.

$A=$ محيط القاعدة × الارتفاع $+\,2.$ مساحة القاعدة $=4x.3x+2x^2=12x^2+2x^2=14x^2$

الاشتقاق:-

$$\frac{dA}{dt}=28x\,\frac{dx}{dt}$$

التعويض:-

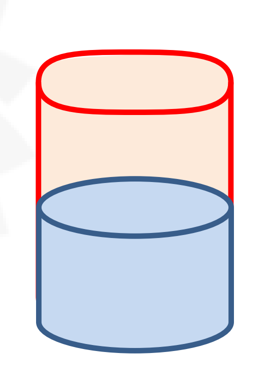
$$\frac{dA}{dt}=28.8\left(\frac{1}{4}\right)=56\,\frac{cm^2}{s}$$

الأسطوانة الدائرية القائمة

- اذا كانت الأسطوانة يصب فيها سائل، راح يتغير مع الزمن كل من ارتفاعها وحجمها (كمية السائل)، ومساحتها الجانبية (مساحة الجدران الجانبية لان الارتفاع يتغير). لكن مساحة قاعدتها ونصف القطر دائما يبقى ثابت.

$V=\pi r^2 h$ $A_s=2\pi rh$

- اما اذا كال بالسؤال الأسطوانة تتغير ابعادها هنا نعتمد على السؤال فقط ونحدد الثوابت والمتغيرات. نشوف منو الي منطي معدل تغيره او طالب معدل تغيره او حسب فهمنا عرفنا منو يتغير ونحدد أيضا منو الثابت.



٢٠٠٠-د١ : -أسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm\backslash s$ بحيث يظل حجمها دائما مساويا الى $320\pi cm^3$ جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها عندما يكون ارتفاعها 5cm



منطي الحجم عرفناه من الوحدات يعني العلاقة حجم اسطوانة.

الفرضية:-

نفرض حجم الاسطوانة =V=320π (ثابت) نفرض نصف القطر= r معدل تغيره= $\frac{dr}{dt}$?

نفرض ارتفاع السائل في المخروط=h=5cm معدل تغيره= $\frac{dh}{dt} = 0.5\ cm\backslash s$ ؟

العلاقة

$$v = \pi r^2 h$$

عدد الرموز=3 لكن الحجم ثابت هو يكول. والارتفاع ونصف القطر متغير يعني عندي اثنين متغير اذن نشتق.

ومادام بين h,r ضرب اذن نشتق ضرب دالتين. بس اعوض قيمة الحجم قبل الاشتقاق لان ثابت حتى نخلص منه .

$$320\pi = \pi r^2 h \qquad 320 = r^2 h$$

الاشتقاق

$$0 = r^2 \frac{dh}{dt} + h.2r\frac{dr}{dt} \qquad 0 = r^2 \frac{dh}{dt} + 2h.r\frac{dr}{dt}$$

عندي r غير معلومة ارجع للعلاقة قبل الاشتقاق واطلعها واعوضها .

$$320 = r^2 h \qquad 320 = r^2 5 \quad \div 5 \to \qquad 64 = r^2 \qquad \sqrt{\text{للطرفين}} \qquad r = 8cm$$

التعويض:-

$$0 = 64 \times 0.5 + 2 \times 5 \times 8\frac{dr}{dt} \qquad 0 = 32 + 80\frac{dr}{dt} \qquad 80\frac{dr}{dt} = -32$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} = -\frac{2}{5} cm\backslash s$$

٢٠١٧-د٢:-أسطوانة دائرية قائمة يصب فيها ماء بمعدل تغير زمني في ارتفاع الماء ٤٠ m/s ، جد معدل التغير في حجم الماء اذا كان نصف قطر قاعدة الأسطوانة يساوي ١٠ cm .

مطلوب تغير الحجم يعني العلاقة حجم اسطوانة.

الفرضية:-

نفرض حجم الاسطوانة =v ومعدل تغيره $\frac{dv}{dt}$

نفرض نصف القطر= r=10cm لازم نوحد الوحدات لو متر لو سم .لذلك راح احول الى المتر بالقسمة على 100 .

$r = \frac{10}{100} = 0.1m$ وهو يبقى ثابت لان عندما يصب الماء يبقى نصف قطر الاسطوانة ثابت اثناء صعود الماء.

نفرض ارتفاع السائل في المخروط=h   معدل تغيره= $\frac{dh}{dt} = +40\ m\backslash s$ ؟

العلاقة

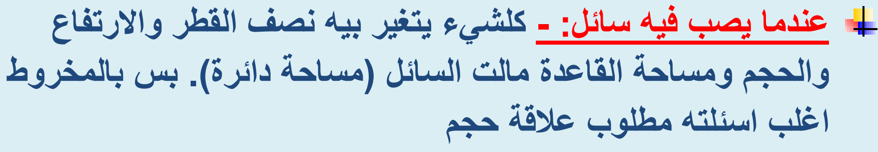
$v = \pi r^2 h$ $\qquad$ $v = \pi(0.1)^2 h$ $\qquad$ $v = 0.01\pi h$

عدد الرموز=3 لكن الي يتغير الحجم والارتفاع فقط. نصف القطر ثابت اثناء صعود الماء لذلك عوضت قيمته قبل الاشتقاق .

الاشتقاق ثم التعويض

$\frac{dv}{dt} = 0.01\pi \frac{dh}{dt}$ $\qquad$ $\frac{dv}{dt} = 0.01\pi \times 40 = 0.4\pi \frac{cm^3}{s}$

المخروط الدائري القائم



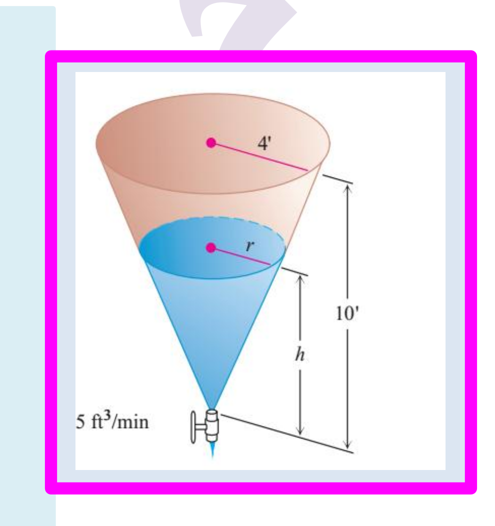
- عندما يصب فيه سائل: - كلشيء يتغير بيه نصف القطر والارتفاع والحجم ومساحة القاعدة مالت السائل (مساحة دائرة). بس بالمخروط اغلب اسئلته مطلوب علاقة حجم

$$\left[V = \frac{\pi}{3} r^2 h\right] \rightarrow \text{(ثلاثة متغيرات)}$$

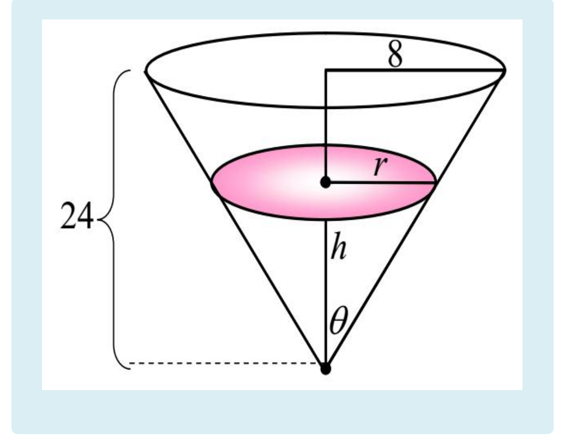
- ولازم نقلل عدد المتغيرات بعلاقة ثانوية هي علاقة $\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{R}{H}$ ثم نعوضها في الرئيسية ونشتق.



- اما إذا منطي معدل تغير اثنين وطالب الثالث بهاي الحالة نشتق كبل.
- اذا المخروط تتغير ابعاده: - هذا يعتمد على منطوق السؤال وحالة نادرة جدا لذلك لا تأتي.



مثال٥-٢٠١٧-وزاري ٥٠٠٠مرة:-مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للأسفل، ارتفاعه يساوي 24cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه بمعدل $1cm^3/s$،جد معدل تغير عمق السائل فى اللحظة التى يكون فيها عمق السائل ١٢ cm .





منطي تغير بالحجم عرفناه من الوحدات يعني العلاقة حجم مخروط.

الفرضية:-

نفرض حجم السائل في المخروط =V

معدل تغير حجم السائل = حجم الصب-حجم التسرب =1-5 =4

معدل تغير حجم السائل= $\frac{dV}{dt}$=$\frac{CM^3}{S}$ 4

نفرض ارتفاع السائل في المخروط=h   معدل تغيره=$\frac{dh}{dt}$ ؟

نفرض نصف القطر=r   (كلما يصبون سائل نصف القطر يتغير بس هنا ما افرض معدل تغيره لان راح ينحذف نصف القطر من العلاقة ليش ؟ هسه راح نعرف ليش نحذف)

العلاقة

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \qquad ---1$

اذا صب السائل فان كمية السائل تزيد ونصف قطر السائل يكبر شوي شوي والارتفاع يصعد لما يكثر الخير ويتبدى. يعني 3متغيرات لكن منطي معلومة عن تغير حجم السائل وطالب التغير مالت الارتفاع وعدنا نصف القطر يتغير بس لا طالب عنه شيء ولا منطي عليه شيء فلازم ما يبقى بالعلاقة.

علاقة ثانوية: -

من المثلث الجبير بالمخروط والمثلث الي يشكله الماء داخل المخروط نطبق علاقة $\tan\theta$ لان متشابهان.

$$tan\theta = \text{مثلث صغير} = \frac{r}{h} = \text{مثلث كبير} = \frac{8}{24} \qquad \rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{3} \qquad r = \frac{h}{3} \qquad r^2 = \frac{h^2}{9} \quad ---2$$

نعوض معادلة 2 في ١.

$$v = \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{9}h = \frac{\pi}{27}h^3$$

هسه بقى عندي بس v وh اذن نشتق.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{27}\ 3h^2\ \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} \qquad = \frac{\pi}{9}\ h^2\ \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}$$

التعويض: -

$$4 = \frac{\pi}{9}\ (12)^2\ \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} \quad \rightarrow 4 = \frac{\pi}{9}\ 144\ \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} \qquad 1 = 4\pi\ \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} \qquad \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{4\pi}\frac{cm}{s}$$

الاشكال الهندسة الأخرى المستطيل والمربع والمثلث والدائرة

- المستطيل والمثلث: -تعتمد على منطوق السؤال ممكن تبقى المساحة ثابتة والابعاد-الطول-العرض-الارتفاع-يتغير. لازم يبقى متغيرين بالعلاقة حتى نشتق دائما.
- بالنسبة الدائرة والمربع لازم المحيط والمساحة متغير وكذلك طول الضلع ونصف القطر. يعني متغيرين فقط

مثال-٢-٢٠١٦-د١-خ:- صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$،يتمدد طولها بمعدل 2cm/s بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون العرض 8cm

(تحليل السؤال :- منطيني مساحة مالت مستطيل وكايل يابه الطول يتمدد والعرض ينقص بس تبقى المساحة ثابتة (ركز على ثابتة). مادام منطي مساحة استخدم علاقة مساحة للمستطيل).

y

x

الفرضية :- نفرض مساحة الصفيحة =A= 96 (ثابتة).

طول الصفيحة =X معدل تغير الطول (يتمدد) = $\frac{dx}{dt}$ = 2+ $\frac{m}{s}$

عرض الصفيحة =y= 8 cm معدل تغير العرض (ينقص) = $\frac{dy}{dt}$؟

العلاقة: -

$$A = x . y \qquad\qquad 96 = x . y$$

(عدنا متغيرين بس. الي همه الطول يتمدد والعرض ينقص يعني نشتق كبل لان بس متغيرين اثنين . هنا نعتبرهم ضرب دالتين).

الاشتقاق:-

$$0=\overset{\text{الاول}}{x}\ \overbrace{\frac{dy}{dt}}^{\text{مشتقة الثانية}}+\overset{\text{الثانية}}{y}\ \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{\text{الاول مشتقة}}$$

$$\rightarrow x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}=0$$

(المطلوب معدل تغير العرض $\frac{dy}{dt}$ بس اكو مشكلة انو قيمة x الي يمثل الطول ما موجودة عندي وحسب الملاحظة 4 نرجع الى العلاقة قبل ان نشتقها ونطلع قيمة x).

$96=x.y \qquad 96=x.8 \qquad x=\frac{96}{8}=12\ cm$

التعويض:-

$12.\frac{dy}{dt}+8.2=0 \qquad 12\frac{dy}{dt}=-16 \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3}\frac{cm}{s}$

٢٠٠٤ د١ :-بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب يتسرب منه الغاز فاذا كان معدل نقصان نصف قطره $\left(\frac{7}{22}cm/s\right)$ بحيث يبقى محافظا على شكله، فعندما يكون نصف القطر 10cm جد :-

١-معدل نقصان حجمه ٢-معدل نقصان مساحته السطحية.

ما دام مطلوب معدل تغير حجم. نستخدم قانون الحجم الكروي.

الفرضية:- نفرض حجم البالون =V معدل تغيره = $\frac{dv}{dt}$ ؟

نفرض نصف القطر = r =10cm معدل تغيره= $\frac{dr}{dt}=-\frac{7}{22}$

نفرض المساحة =A معدل تغيرها= $\frac{dA}{dt}$ =؟

العلاقة:-

$$V=\frac{4\pi}{3}r^3$$

مادام متغيرين اذن نشتق.

الاشتقاق:-

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4\pi}{3}\ 3r^2\ \frac{dr}{dt} \qquad \frac{dV}{dt}=4\pi\ r^2\ \frac{dr}{dt}$$

التعويض:-

$$\text{نعوض}\rightarrow\frac{dv}{dt}=4\frac{22}{7}\ (100)\times-\frac{7}{22}$$

$$\frac{dv}{dt}=4\pi\ (100)\times-\frac{7}{22}$$

$$\frac{dv}{dt}=-400\frac{cm^3}{s}$$

٢-معدل تغير المساحة:-

العلاقة:- $A = 4\pi r^2$

ماداام متغيرين اذن نشتق.

الاشتقاق:-

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

التعويض:- $\frac{dA}{dt} = 8\pi\ (10) \times -\frac{7}{22}$ نعوض $\rightarrow \frac{dA}{dt} = 4\frac{22}{7}\ (10) \times -\frac{7}{22} = -40\ \frac{cm^2}{s}$

$$\frac{dA}{dt} = -40\frac{cm^2}{s}$$

مسائل كرة او مكعب مغطى بالجليد

الي يتغير بيه هو حجم الجليد ومساحته وسمك الجليد فقط.

والقانون اما

حجم الجليد=حجم المكعب الكلي(حديد + جليد)- حجم المكعب الحديدي.

اما المساحة فدير بالك منها

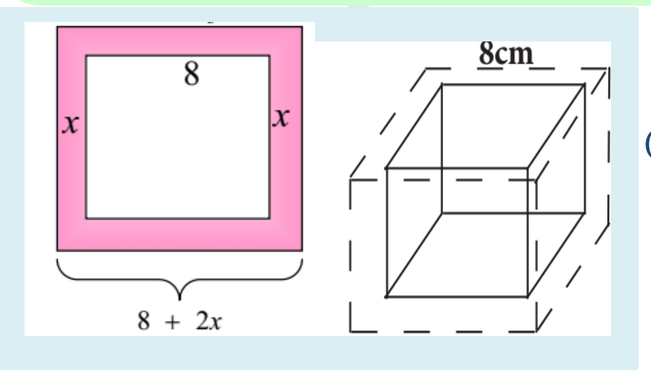
حيث نطبق   مساحة الشكل الكلية=مساحة بدون طرح.

بكلا الحالتين فان طول ضلع المكعب الكلي=طول ضلع مكعب الحديد+٢ سمك الجليد من جهتين.

نصف القطر الكلي للكرة=نصف قطر الحديد+ سمك الجليد من جهة واحدة فقط.

مثال كتاب-٢٠١٤-د١-خ:-مكعب صلد طول حرفه 8cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعب فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك 1cm

(اثرائي) ثم احسب معدل التغير في مساحة الجليد ؟



(تحليل السؤال: - منين نبدي ؟ منطي ذوبان الجليد بوحدة سم مكعب يعني وحدات حجم ومادام الشكل مكعب اذن العلاقة علاقة حجم مكعب)

الفرضية:-

نفرض حجم الجليد=V   معدل تغيره (ذوبانه)= $\frac{dV}{dt} = -6$

نفرض سمك الجليد = X=1   معدل تغيره (نقصانه) = = $\frac{dX}{dt} = ؟$

مساحة الجليد=A معدل تغيرها $\frac{dA}{dt} = ؟$

العلاقة :- حجم الجليد فقط =حجم المكعب الكلي (صلد +جليد)- حجم المكعب الصلد .

$$V = (\text{طول الضلع الكلي})^3 - (\text{طول الضلع الصلد})^3 = (8+2x)^3 - 8^3$$

(عدنا سمك وحجم الجليد يتغير يعني متغيرين اثنين فقط. اذن ننتقل للاشتقاق).

الاشتقاق:-

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2 \quad 2\frac{dx}{dt} - 0$$

التعويض:-

$$-6 = 3(8+2.1)^2 \quad 2\frac{dx}{dt} \qquad -6 = 6(10)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-6 = 600\frac{dx}{dt} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} = -\frac{1}{100}\frac{cm}{s}$$

العلاقة :- مساحة الجليد=مساحة المكعب الكلي

$$A = 6 \times \text{مساحة وجه} = 6(\text{مساحة مربع}) = 6(8+2x)^2$$

(عدنا سمك وحجم الجليد يتغير يعني متغيرين اثنين فقط. اذن ننتقل للاشتقاق).

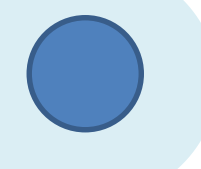
الاشتقاق:-

$$\frac{dA}{dt} = 18(8+2x)^1 \quad 2\frac{dx}{dt}$$

التعويض:-

$$\frac{dA}{dt} = 18(8+2.1)^1 \quad 2 \times -\frac{1}{100} = -\frac{180}{100} = -1.8\frac{cm^2}{s}$$

-2017-د١-خ:-كرة صلدة نصف قطرها 8cm مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكلها يبقى كروي فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $5\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك 1cm



(تحليل السؤال:- منين نبدي ؟ منطي ذوبان الجليد بوحدة سم مكعب

يعني وحدات حجم ومادام الشكل كرة اذن العلاقة علاقة حجم كرة)

الفرضية:-

نفرض حجم الجليد =V معدل تغيره (ذوبانه)= $\frac{dV}{dt} = -5$ نفرض سمك الجليد =X=1 معدل تغيره (نقصانه)= $\frac{dX}{dt} = ?$

العلاقة:- حجم الجليد فقط =حجم الكرة الكلي (صلد+جليد) - حجم الكرة الصلد .

$$V = \frac{4\pi}{3}(r+x)^3 - \frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3}(5+x)^3 - \frac{4\pi}{3}5^3 = \frac{4\pi}{3}(5+x)^3 - \frac{4\pi}{3}125$$

(عدنا سمك وحجم الجليد يتغير يعني متغيرين اثنين فقط. اذن ننتقل للاشتقاق).

الاشتقاق:-

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi(5+x)^2 \quad \frac{dx}{dt} - 0$$

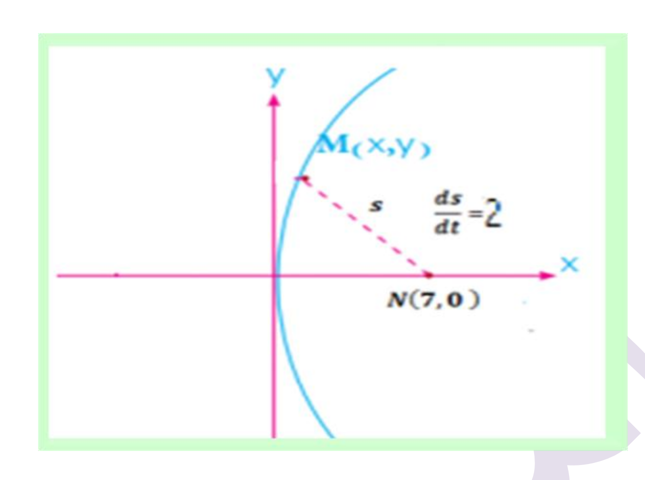
التعويض:-

$$-5 = 4\pi(5+1)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$-5 = 144\pi \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-5}{144\pi} \frac{cm}{s}$$

مسائل النقطة المتحركة



فيها حالتين

الحالة الأولى: - اذا منطي نقطة متحركة تبتعد عن نقطة ثابتة على منحني ومنطي دالة المنحني بالسؤال يكون هنا عدنا ٣ متغيرات

- اذا مطلوب معدل تغير احداثي سيني او صادي $\frac{dy}{dt} . \frac{dX}{dt}$ ومنطي معدل تغير البعد $\frac{ds}{dt}$ نستخدم

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ونعوض الدالة بالعلاقة الرئيسية ونجعل العلاقة بين المعطى والمطلوب بالسؤال فقط. ونجد المجهول مباشرة.

- اذ مطلوب احداثيات النقطة $M(x, y)$ نطبق قانون البعد ونعوض الدالة مالت المنحني ثم نشتق ويعطي بالسؤال علاقة بين معدل تغير البعد وبين معدل تغير سيني او صادي نعوضها همينا بس بعد الاشتقاق ونحل المشتقة مثل المعادلات ونجد قيم x,y.

الحالة الثانية: - يطلب احداثيات نقطة بس هالمرة النقطة ما تبتعد عن نقطة ثابتة وانما فقط نقطة متحركة على منحني ومنطي معادلة المنحني.

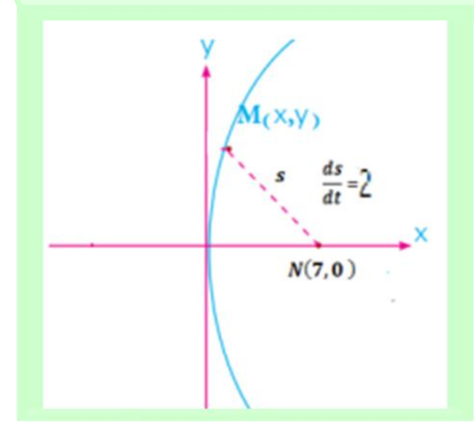
- نشتق معادلة المنحني.
- نحلها ونطلع معادلة بين x,y
- نرجع نعوضها بالعلاقة الرئيسية ونبسط ونجد المجهول.

اول من استخدم علم المثلثات هم البابليون القدماء لتحديد مواقع النجوم والكسوف والخسوف اما النسب المثلثية (sinx.cosx.tanx) استخدمها الهنود

لكن من طورها وجعلها بالصورة التي نستخدمها الان هم العلماء العرب –الخوارزمي-البوزجاني

حيث ان العديد من المتطابقات التي نستخدمها الان هي من اكتشافات البوزجاني.

مثال-٦-٢٠١٦:-لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافيء $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7.0) يساوي $0.2\ Unit/s$ ،جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون X=4





(الحالة الأولى-أ).

الفرضية:-

نفرض نقطة $M(x\ ,y)$ معدل تغير الاحداثي السيني (ابتعاده) =$\frac{dx}{dt}$ = ؟

نفرض البعد بين نقطتين S= معدل تغير البعد بين النقطتين (ابتعاد) = =$\frac{dS}{dt}$ = 0.2

العلاقة:-

$$S = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + y^2}$$

(اذا تحركت النقطة راح يتغير X,Y ويتغير البعد بين النقطتين S ويعني ٣ متغيرات. بس بهذا السؤال منطي واحد وطالب ثاني اما Y لا منطي معدل تغيرها ولا طالبه يعني لازم نحذفه بعلاقة ثانوية).

العلاقة الثانوية:- نعوضها بالرئيسية قبل الاشتقاق

$$y^2 = 4x \qquad ---2$$

$$S = \sqrt{(x - 7)^2 + 4x}$$

الاشتقاق:-

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(x - 7)\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{(x - 7)^2 + 4x}}$$

التعويض:-

$$0.2 = \frac{2(4 - 7)\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{(4 - 7)^2 + 4.4}}$$

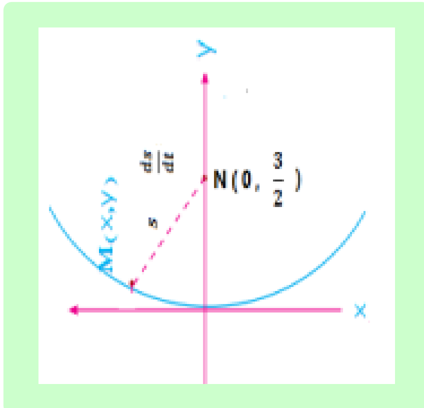
$$= \frac{ds}{dt} = \frac{-6\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{9 + 16}} = \frac{-2\frac{dx}{dt}}{2.5} = -\frac{2\frac{dx}{dt}}{10}$$

$$0.2 = -0.2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \quad \frac{unit}{s}$$

مثال-٦-٤-٢٠١٤د١ : -لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافيء $X^2 = y$ جد احداثيي النقطة M بحيث يكون معدل ابتعادها النقطة $\left(0 , \frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M

الحالة الأولى –ب



الفرضية:-

نفرض نقطة $M(x . y)$ معدل تغير الاحداثي الصادي= $\frac{dy}{dt}$ = ؟

نفرض البعد بين نقطتين =S معدل تغير البعد بين النقطتين (ابتعاد) = $\frac{dS}{dt}$

معدل تغير البعد بين النقطتين =ثلثي المعدل لتغير المحور الصادي يعني $\frac{dS}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$

العلاقة:-

$$S = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} \quad ----1$$

(اذا تحركت النقطة راح تتغير x,y والبعد s همينا يتغير يعني عندي 3 متغيرات. هنا جاي يتكلم عن المعدل مالت البعد بين النقطتين ومعدل المحور الصادي بس الاحداثي السيني لا منطي معلومات عنه ولا طالبه مني. يعني ينرفع من العلاقة بحيث تبقى بس S ,y . ندور علاقة ثانوية واغلب الاسئلة الي تجي بيها معادلة بالسؤال هاي تمثل علاقة ثانوية).

العلاقة الثانوية :- نعوضها بالرئيسية قبل الاشتقاق

$$x^2 = y \quad ---2$$

$$S = \sqrt{y + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} \quad ----1$$

(متغيرين اثنين)

الاشتقاق:-

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt} + 2\left(y - \frac{3}{2}\right)\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}}$$

نبسط هيج معادلة راح ادخل 2 على القوس و اخذ $\frac{dy}{dt}$ عامل مشترك بالبسط .

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}[1 + 2y - 3]}{2\sqrt{y + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{dy}{dt}[2y - 2]}{2\sqrt{y + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}} \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$$

التعويض:-

$$\frac{2}{3}\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}[2y - 2]}{2\sqrt{y + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}} \qquad \div \frac{dy}{dt} \qquad \frac{2}{3} = \frac{2y - 2}{2\sqrt{y + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}}$$

طرفين في وسطين

$$\frac{2}{3}=\frac{y-1}{\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}} \qquad \frac{2}{3}=\frac{2(y-1)}{2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

بالتربيع

$$\left[2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}\right]^2=[3y-3]^2 \qquad 2\sqrt{y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}=3y-3$$

نفتح الاقواس

$$4\left[y+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\right]=9y^2-18y+9$$

$$4y+4y^2-12y+9=9y^2-18y+9 \qquad 4\left[y+y^2-3y+\frac{9}{4}\right]=9y^2-18y+9$$

نصفرها

$$4y^2-8y+9=9y^2-18y+9$$

$$9y^2-4y^2-18y+8y+9-9=0 \qquad 5y^2-10y=0 \qquad \div 5$$

$$y^2-2y=0 \qquad y(y-2)=0$$

اما $Y=0$

او $y-2=0$ $\qquad y=2$

نعوض في معادلة 2 لنجد قيم x

$y=0$ $\qquad x^2=y$ $\qquad x^2=0$ $\qquad x=0$ تهمل $(0,0)$

$y=2$ $\qquad x^2=y$ $\qquad x^2=2$ $\qquad x=\mp\sqrt{2}$

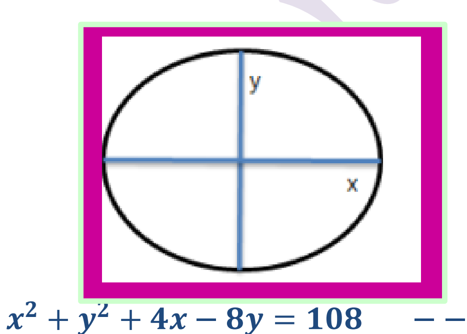
$M2\ (\sqrt{2}.2)$ $\qquad M3(-\sqrt{2}.2)$

تمارين-٢٠١٨-د٢:-جد النقاط التي تنتمي للدائرة والتي عندها معدل تغير X يساوي معدل تغير Y ؟

الحالة الثانية



الفرضية:-



نفرض نقطة $M(x\ ,y)$ معدل تغير الاحداثي السيني $=\frac{dx}{dt}$

معدل تغير الاحداثي الصادي $=\frac{dy}{dt}$ معلومه $\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$

العلاقة:-

$$x^2+y^2+4x-8y=108 \quad ----------1$$

(اذا تحركت النقطة راح تتغير x,y بس ما دام عندي متغيرين اذن نشتق).

الاشتقاق:- $\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$ عوض

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0$$

التعويض:-

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dx}{dt}=0$ $\qquad 2\frac{dx}{dt}$

$x+y+2-4=0 \qquad x+y-2=0 \qquad y=2-x \quad ------2$

عوض معادلة 2 في 1 .

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)=108 \qquad x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x=108$

$2x^2+8x-12-108=0 \qquad 2x^2+8x-120=0 \qquad \div 2$

$x^2+4x-60=0 \qquad (x+10)(x-6)=0$

اما $x+10=0 \qquad x=-10$

او $x-6=0 \qquad x=6$

نعوض في معادلة 2 لان ابسط .

$x=-10 \qquad y=2-(-10)=2+10=12$

$x=6 \qquad y=2-(6)=-4$

$M1(-10.12) \qquad M2\ (6.-4)$

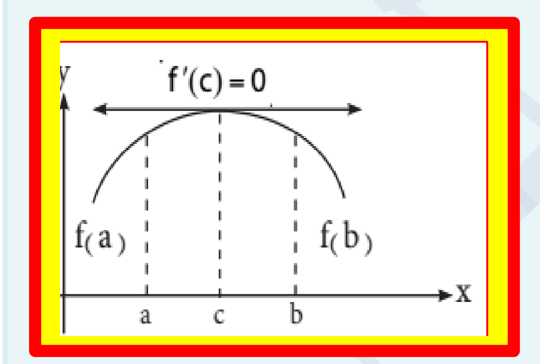
مبرهنة رول

اثبت العالم الفرنسي ميشيل رول :-بانه اذا كانت الدالة مستمرة ضمن فترة معينة وتنطلق من قيمة معينة وتبدأ بالتزايد او التناقص وترجع لنفس النقطة فأنها تمتلك نقطة واحدة او اكثر يكون عندها ميل الدالة =يعني المشتقة للدالة=صفر. وطريقة الحل :-

لازم الدالة تحقق الشروط الثلاثة :-



١-نثبت ان الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [a, b]



٢-نثبت ان الدالة قابلة للاشتقاق ضمن الفترة المفتوحة (a, b).

٣-نعوض قيمة a وقيمة b في الدالة الاصلية ولازم يطلع الناتج متساوي.

اذا تحقق الشروط الثلاثة فأننا نقول الدالة تحقق مبرهنة رول .

ويوجد عدد حرج يجعل ميل المشتقة =0 ونروح نجد قيمة C :-

١-نشتق الدالة يعني نطلع $F'(X)$

٢-نشيل كل X بالمشتقة ونعوض مكانها C ونخلي الجواب =0 يعني F'(C) =0 .

٣-نحلها ونجد قيمة C ولازم تنتمي للفترة المفتوحة (a, b).

٤-اذا طلعن اكثر من قيمة ل C تشوف منو الي تنتمي ومنو الي ما تنتمي تهملها . ولازم اكو وحدة منهن تنتمي غصبا عليك .

ملاحظة الفترة المغلقة [a, b] هي تشمل كل القيم من a الى b بحيث a وb داخلات ضمن الفترة .

الفترة المفتوحة (a, b)هي تشمل كل القيم من a الى b بحيث a وb ما داخلات ضمن الفترة .

النوع الأول من الدوال: -الدالة الكثيرة الحدود (خطية) يعني ما بيها لا كسر ولا جذر. هاي مستمرة دائما على اي فترة ينطيها بالسؤال لان مجالها =R (كل الاعداد الحقيقية).

في كل مما يأتي هل الدالة تحقق مبرهنة رول؟ وجد قيمة c الممكنة: -

1. $f(x) = (2-x)^2 \qquad x \in [0.4]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0.4]$ لانها كثيرة الحدود .
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (0.4) لانها كثيرة الحدود .
٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب

$F(a) = f(0) = (2-0)^2 = 2^2 = 4$

$F(b) = f(4) = (2-4)^2 = -2^2 = 4$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C.

$F'(X) = 2(2-X).-1 = -2(2-x)$

$f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بC ونخلي الناتج =0

$-2(2-c) = 0 \qquad \div -2$

$2-c = 0$

$c = 2 \in (0.4)$

3) $f(x) = x^3 - 9x \qquad .x \in [-3.3]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-3.3]$ لانها كثيرة الحدود .
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-3.3) لأنها كثيرة الحدود.
٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب

$F(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$

$F(b) = f(3) = (-3)^3 - 9(-3) = 27 - 27 = 0$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C.

$F'(X) = 3x^2 - 9 \qquad f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بC ونخلي الناتج =0

$3c^2 - 9 = 0 \qquad \div 3$

$c^2 = 3$

$c = \mp\sqrt{3} \in (-3.3)$

ملحوظة من تاخذ الجذر لازم تخلي $(\mp)$ للناتج لان اذا ما خليت يعني هملت وحدة من الاجابات.
هذا الرقم $(\sqrt{3} = 1.723)$ داخل ضمن الفترة المفتوحة سواء موجب او سالب لان الفترة جبيرة من 3 لحد -3.

2) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3 \quad .x \in [-1.1]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.1]$ لانها كثيرة الحدود.
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.1) لانها كثيرة الحدود .
٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب.

$F(a) = f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$

$F(b) = f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$

$F(a) \neq f(b)$

الدالة لا تحقق شروط مبرهنة رول ولا يوجد C. لفشل الشرط الثالث.

6) $f(x) = x^3 - x \qquad x \in [-1.1]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-3.3]$ لانها كثيرة الحدود.
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-3.3) لانها كثيرة الحدود .
٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب.

$F(a) = f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$F(b) = f(1) = (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C.

$F'(X) = 3x^2 - 1 \qquad f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بC ونخلي الناتج =0

$3c^2 - 1 = 0$

$3c^2 = 1$

$c^2 = \frac{1}{3}$

$c = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-3.3)$

ملحوظة من تاخذ الجذر لازم تخلي $(\mp)$ للناتج لان اذا ما خليت يعني هملت وحدة من الاجابات.
هذا الرقم $(\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57)$ داخل ضمن الفترة المفتوحة سواء موجب او سالب لان الفترة جبيرة من 1 لحد -1.

4) $f(x) = (x^2 - 3)^2 \qquad x \in [-1.1]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.1]$ لانها كثيرة الحدود.
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.1) لانها كثيرة الحدود.
٣-نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية

$F(a) = f(-1) = ((-1)^2 - 3)^2 = -2^2 = 4$
$F(b) = f(1) = ((1)^2 - 3)^2 = 2^2 = 4$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C.

$F'(X) = 2(x^2 - 3).2x \quad = 4x(x^2 - 3)$
$f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0

$4c(c^2 - 3) = 0$

اما $4c = 0 \qquad c = 0 \in (-1.1)$

او

$c^2 - 3 = 0$
$c^2 = 3 \qquad c = \mp\sqrt{3} \notin (-1.1)$

5) $f(x) = (x - 1)^4 \qquad x \in [-1.3]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.3]$ لانها كثيرة الحدود.
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.3) لانها كثيرة الحدود.
٣-نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب

$F(a) = f(-1) = (-1 - 1)^4 = -2^4 = 16$
$F(b) = f(3) = (3 - 1)^4 = 2^4 = 16$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C.

$F'(X) = 4(x - 1)^3 .1 \qquad f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0

$4(c - 1)^3 = 0 \qquad \div 4$
$(c - 1)^3 = 0 \qquad \sqrt[3]{\text{للطرفين}}$
$c - 1 = 0 \qquad c = 1 \in (-1.3)$

7) $f(x) = x^2 - 3x \qquad x \in [-1.4]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.4]$ لانها كثيرة الحدود.
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.4) لانها كثيرة الحدود.
٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب

$F(a) = f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$
$F(b) = f(4) = 4^2 - 3(4) = 16 - 12 = 4$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C.

$F'(X) = 2x - 3 \qquad f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0

$2c - 3 = 0$
$2c = 3$
$c = \frac{3}{2} \quad \in (-3.3)$

10) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} \qquad x \in [1.2]$

نجعل المقام =0.

$x - 2 = 0 \qquad x = 2 \quad \in [1.2]$

١-الدالة غير مستمرة على الفترة المغلقة $[1.2]$ لان $x = 2 \quad \in [1.2]$

الدالة لا تحقق مبرهنة رول ولا يوجد C.

ميشيل رول (بالفرنسية: Michel Rolle) (ولد في أمبير بمقاطعة أوفيرن الفرنسية في 21 أبريل 1652 وتوفي في باريس في 8 نوفمبر 1719) هو عالم رياضيات فرنسي اشتهر بوضعه مبرهنة رول (1691). كما كان أحد من اشتركوا في ابتكار طرق الحذف لحل المعادلات بالمصفوفات والمسمى الحذف الغاوسي في أوروبا (1690). ضُم إلى عضوية الأكاديمية الفرنسية للعلوم سنة 1685. في سنة 1690 نشر رول كتابه "رسالة في الجبر" (بالفرنسية: Traité d'Algebre).

النوع الثاني من الدوال :-بالنسبة للدالة الكسرية ما يصير مباشرة نكول مستمرة لو لا.

أ-نجعل المقام =0 ونحله ونطلع قيمة x.

ب-اذا تنتمي للفترة بالسؤال نكول يابه الدالة ما مستمرة ولا تحقق رول وننهي الحل.

ج- بس اذا طلعت ما تنتمي بهاي الحالة نكله مستمرة وقابلة للاشتقاق ونستمر بالحل.

$$9)\ f(x) = 2x + \frac{2}{x} \qquad x \in \left[\frac{1}{2}.2\right]$$

١-نتحقق من الاستمرارية: - نجعل المقام = 0 .

$x = 0 \quad \notin \left[\frac{1}{2}.2\right]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}.2\right]$

لان $\left[\frac{1}{2}.2\right] \quad \notin \quad x = 0$.

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}.2\right)$

لان $\left(\frac{1}{2}.2\right) \quad \notin \quad x = 0$.

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب

$$F(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 2.2 = 5$$

$$F(b) = f(2) = 2.2 + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C. نبسط الدالة قبل اشتقاقها حتى ما نشتقها قسمة دالتين.

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

$$= 2x + 2x^{-1} \qquad \text{هسه نشتق}$$

$$f'(x) = 2 - 2x^{-2} = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(c) = 0$$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـ C ونخلي الناتج =0

$$2 - \frac{2}{c^2} = 0$$

$$2 = \frac{2}{c^2}$$

$$c^2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$c = \pm 1 \qquad c = 1 \in \left(\frac{1}{2}.2\right)$$

$$c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}.2\right)$$

النوع الثالث:-بالنسبة لدوال $(\sin\theta . \cos\theta)$ هذن مستمرات دائما لان مجالهن هو R .

أ-اذا الزوايا ما متساوية لازم نساوي الزوايا والافضل دائما الكبيرة ننزلها الى الصغيرة ونستخدم قانونين حسب الدالة: -

$$Sin2\theta = 2\, sin\theta\, cos\theta$$

$$cos2\theta = 1 - 2sin^2\theta$$

$$= 2cos^2\theta - 1$$

ب-هنا C يمثل الزاوية ولازم احنا حافظين قيم الزوايا المحورية والخاصة.

واذا طلع $sin\theta. cos\theta = -1.0.1$ فان الزاوية محورية . اما اذا طلع $sin\theta. cos\theta = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$ فان قيمة الزاوية خاصة $\left(\frac{\pi}{3}.\frac{\pi}{4}.\frac{\pi}{6}\right)$ وتطلع قيمتين للزاوية من اشارة الربع يعني نروح نطلع السعة

$$11)\ f(x) = cos2x + 2cosx$$

$$x \in [0.2\pi]$$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0.2\pi]$ لان دالة $cos\theta$ مجالها R .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (0.2π) لان دالة $cos\theta$ مجالها R.

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب

$$F(a) = f(0) = cos2(0) + 2cos0 = 1 + 2.1 = 3$$

$$F(b) = f(2\pi) = cos2(2\pi) + 2cos2\pi$$

$$= cos(4\pi) + 2cos2\pi$$

= زاوية زوجية راجع الفصل الاول

$$= 1 + 2.1 = 3$$

يعني في الربع الاول والربع الثالث .نجد السعة الاساسية همينا .

في الربع الاول:-

$$c = \theta = \frac{\pi}{4}$$

في الربع الثالث:-

$$c = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

هسه نقارن قيم C ونأخذ بس الي تنتمي ونهمل الباقيات .

$$C = \frac{\pi}{4}.\frac{5\pi}{4} \in (0.2\pi)$$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C .

$F'(X) = -sin2x \quad 2 + 2 \times -sinx$

$\quad = -2sin2x - 2sinx$

$f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـ C ونخلي الناتج =0

$-2sin2c - 2sinc = 0 \qquad \div -2$

$sin2c + sinc = 0$ نوحد الزوايا

$2sinc\ cosc + sinc = 0$

$sinc\ (2\ cosc + 1) = 0$

اما

$sinc = 0$ محورية

$c = 0.\pi.2\pi.3\pi.\ldots\ldots.n\pi$

او

$2\ cosc + 1 = 0$

$2\ cosc = -1$

$cosc = -\frac{1}{2}$

$c = \frac{\pi}{3}$

وبما ان اشارة $cosc$ سالبة يعني انه يقع في الربع الثاني والثالث .

في الربع الثاني: -

$c = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

في الربع الثالث: -

$c = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

هسه نقارن قيم C ونأخذ بس الي تنتمي ونهمل الباقيات.

$C = 0.2\pi.3\pi \ldots\ldots.. \notin (0.2\pi)$

$C = \pi \in (0.2\pi) \qquad C = \frac{2\pi}{3}.\frac{4\pi}{3} \in (0.2\pi)$

$12) f(x) = sinx + cosx \quad x \in [0.2\pi]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0.2\pi]$ لان الفترة تقع ضمن مجالها .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (0.2π) لان الفترة تقع ضمن مجالها .

٣-هسه نعوض قيم الفترة بالدالة الاصلية كون يطلعون نفس الجواب

$F(a) = f(0) = sin(0) + cos0 = 0 + 1 = 1$

$F(b) = f(2\pi) = sin(2\pi) + cos2\pi = 0 + 1 = 1$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C .

$F'(X) = cosx - sinx$

$f'(c) = 0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـ C ونخلي الناتج =0

$cosc - sinc = 0$

$cosc = sinc$

(هسه افكر بيني وبين نفسي واجاوب يا زاوية يتساوى بيها $cosc = sinc$ ؟ اممم . فقط45 . لكن يتساويان بالربع الأول والربع الثالث لانهما في الربع الثاني والرابع يختلفان بالإشارة لذلك غير متساويان)

❖ في الربع الأول

$c = \frac{\pi}{4} \in (0.2\pi)$

❖ في الربع الثالث

$c = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \in [0.2\pi]$

$11) f(x) = tanx \qquad x \in [0.2\pi]$

توضيح: -دالة tanx دالة كسرية لذلك احولها الى اصلها واحلها حسب الطريقة الكسرية.وبعدين اطلع الزاوية الي تجعل المقام=صفر ونتأكد منها تنتمي لو لا.

$y = tanx = \frac{sinx}{cosx}$

$cosx = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2}.\frac{3\pi}{2} \in [0.2\pi]$

اذن الدالة ليست مستمرة على الفترة المعطاة لان

$x = \frac{\pi}{2}.\frac{3\pi}{2} \in [0.2\pi]$

توضيح ما مستمرة لان هذان الزاويتين يجعلان المقام صفر ويقعن ضمن مجال الفترة بالسؤال فتصبح غير معرفة لذلك تكون غير مستمرة لان يوجد قطع.

أحدث التلاميذ جلبة شديدة في الفصل فقرر المدرس معاقبتهم بإعطائهم مهمة صعبة ينشغلون في حلها. المهمة التي طُلب من التلاميذ القيام بها هي جمع الأعداد ما بين ١ و ١٠٠. ظن المعلم أن الهدوء سيعود إلى الفصل وأن انهماك التلاميذ في حل هذه المسألة الحسابية سيستمر ساعات، لكن لم تمض بضعة دقائق حتى تقدم صبي من المعلم وقال له أن محصلة جمع الأعداد هي ٥٠٥٠. انعقد لسان المعلم من الدهشة ثم سأل الصبي: كيف توصلت إلى هذه الإجابة الصحيحة؟ فقال الصبي إنه لاحظ أن ناتج جمع ١ + ١٠٠ هو ١٠١، وناتج جمع ٢ + ٩٩ هو أيضا ١٠١، وناتج جمع ٣ + ٩٨ هو كذلك ١٠١، ويتكرر الأمر حتى نصل إلى ٥٠ + ٥١، إذا كل ما علينا هو أن نضرب ١٠١ في ٥٠ وهي عدد مرات التكرار فيكون الناتج ٥٠٥٠.

كان هذا الصبي النبيه، ابن التسعة أعوام، هو الرياضي الألماني العبقري كارل فريدريش جاوس. وقد دلت هذا الحادثة على دقة ملاحظته، ورهافة فهمه لعلم الرياضيات كوسيلة مبتكرة لفهم وتوصيف الظواهر الطبيعية. ارتبط جاوس منذ صغره بعالم الأرقام، حتى أنه نفسه كان يقول أنه تعلم الحساب قبل تعلم الكلام. واستمرت هذه العلاقة الحميمة طيلة حياته، نجح خلالها في اكتشاف طبيعة الأعداد الأولية، واستطاع تطوير مفهوم الأعداد المركبة، التي ساعدت في حساب الكثير من الظواهر الفيزيائية. ولم يرتضِ هذا الرياضي الكبير أن تظل أفكاره مجردة تعيش في عالم الجبر والحساب، فاستثمر نظرياته وملاحظاته في مجالات مفيدة من الحياة العملية، مثل قياس سطح الأرض وحساب مسار الأجسام الفضائية وتحديد موعد عيد الفصح فلكيا.

النوع الرابع من الدوال: -اذا كانت الدالة مجزئة الى شطرين نقوم بما يلي

١-نحدد العدد الفاصل بين الدالتين وهو الرقم المشترك بينهم. بعدين نعوضه بدالة الفترة المغلقة من جهتين او تحتوي علامة يساوي مع الاكبر من او اصغر من. ولازم يطلع ناتج (يعني الدالة معرفة).

٢-نحدد دالة اليمين ودالة اليسار ونعوض الحد الفاصل فيهما كلاهما. لازم كون يطلعون متساوين.

٣-ناتج نقطة ١ لازم =ناتج نقطة ٢.أي نقطة تفشل منها وننهي الحل ونكول الدالة غير مستمرة ولا تحقق شروط رول.

واذا تحققن الشروط نكول مستمرة. ثم نشتق ونعوض بالدالتين لازم متساوين ايضا ثم ناخذ دالة المغلقة ومنها نجد العدد الحرج.

س\\\ برهن ان الدالة تحقق مبرهنة رول وجد قيمة c ان امكن

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & .x\in[-1.2] \text{ يمين} \\ -1 & .x\in[-4.-1) \text{ يسار}\end{cases}$$

الحد الفاصل هو x=-1

١-نثبت الاستمرارية حسب قواعدها الثلاثة.

$1) f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$ معرفة

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to -1^+} x^2+1=(-1)^2+1=2 \\ \lim_{x\to -1^-} -1=-1\end{cases}$$

الغاية غير موجودة لان $L1\neq L2$

الدالة ليست مستمرة ولا تحقق شروط مبرهنة رول ولا يوجد C.

اثرائي: -برهن ان الدالة تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة $[-4.5]$وجد قيمة c ان امكن

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 2 \\ 4x-4 & x>2\end{cases}$$

الحد الفاصل هو x=2 (الي جوى دالة يمين لان اكبر والفوك دالة يسار)

١-نثبت الاستمرارية حسب قواعدها الثلاثة.(نعوض الحد الفاصل بدالة الي بيها يساوي)

$1-f(2)=(2)^2=4$ معرفة

$$2-\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-} x^2=(2)^2=4 \\ \lim_{x\to 2^+} 4x-4=4.2-4=4\end{cases}$$

الغاية موجودة لان $L1=L2$

$3-f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$

الدالة مستمرة على الفترة $[-4.5]$.

٢-نجد المشتقة (ونعوض فيها قيمة x=2 ويجب ان تكون القيمة متساوية).

$$f'(x)=\begin{cases}2x \\ 4\end{cases}$$

نجد f(2) .

$$f'(2)=\begin{cases}2.2=4 \\ 4\end{cases}$$

متساويان. الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-4,5)

.

٣-نعوض قيم الفترة (a,b) بس نعوض كل رقم في مكانه ضمن اليسار او اليمين لازم f(a)=f(b).

$F(a)=$ يسار $=f(-4)=(-4)^2=16$

$F(b)=$ يمين $=f(5)=4.5-4=16$

الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ويوجد C نشتق دالة اليساوي فقط

$F'(X)=2x \qquad f'(c)=0$

هسه نعوض مكان كل x في المشتقة بـC ونخلي الناتج =0

$2c=0$

$c=0 \quad \in(-3.3)$

لم نكن ان نصل الى ما وصلنا له من خيبة وخسران و انهيار لولا

- ❖ الجهل
- ❖ التقديس
- ❖ الخوف

الجهل بالنفس وقدرتها على التفكير والاتكال على جعل الاخرين يفكرون مكانك. واعتقادك ان بعضهم مقدس على لا يخطأ والخوف من الطغاة هي السبب في كل ما نمر به.

مبرهنة القيمة المتوسطة

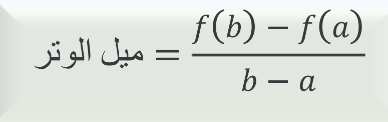
تم تعميم مبرهنة رول لتصبح مبرهنة القيمة المتوسطة. التي تنص :-

١-اذا كانت الدالة مستمرة على الفترة [a ,b]   ٢-قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) .

فان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ويوجد عدد حرج عنده ميل المماس للدالة =ميل الوتر . ولغرض ايجاد العدد الحرج نتبع ما يلي :-

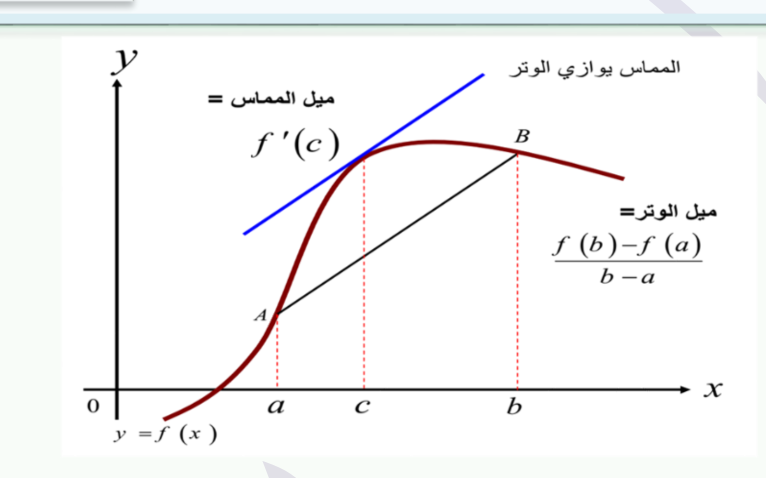
١-نجد ميل المماس =المشتقة الاولى للدالة ثم نعوض فيها قيمة c فيها لتمثل ________١

٢-نجد ميل الوتر حيت نجد f(a), f(b) ونجد ايضا (b-a) ثم



$$\text{ميل الوتر} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

٣-نجعل ميل الوتر=ميل المماس ومنها نجد قيمة c ولازم تنتمي للفترة المفتوحة



معنى القيمة المتوسطة لاحظ عند x=c فان ميل المماس =ميل الوتر .

برهن ان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ضمن الفترة وجد قيمة c ان امكن

$$f(x) = x^2 - 6x + 4 \qquad x \in [-1.7]$$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.7]$ لانها كثيرة الحدود .
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.7) لانها كثيرة الحدود .
الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة ويوجد C تجعل ميل المماس =ميل الوتر.
نجد ميل المماس.

$F'(x) = 2x - 6$

$\text{ميل المماس} = f'(c) = 2c - 6$

نجد ميل الوتر:-

$F(a) = f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 4 = 1 + 6 + 4 = 11$

$F(b) = f(7) = (7)^2 - 6(7) + 4 = 49 - 42 + 4 = 7 + 4 = 11$

$b - a = 7 - (-1) = 7 + 1 = 8$

$$\text{ميل الوتر} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{11-11}{8} = \frac{0}{8} = 0 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \qquad x \in [-1.5]$$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.5]$ لانها كثيرة الحدود .
٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.5) لانها كثيرة الحدود .
الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة
نجد ميل المماس

$F'(x) = 2x - 4$

$\text{ميل المماس} = f'(c) = 2c - 4$

نجد ميل الوتر:-

$F(a) = f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 1 + 4 + 5 = 10$

$F(b) = f(5) = (5)^2 - 4(5) + 5 = 25 - 20 + 5 = 5 + 5 = 10$

$b - a = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$

$$\text{ميل الوتر} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{10-10}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

هسه نجعل ميل المماس=ميل الوتر ونطلع قيمة C.

$2c - 4 = 0 \qquad 2c = 4$

$c = 2 \in (-1.5)$

$$g(x)=\frac{4}{x+2} \qquad x\in[-1.2]$$

١-نثبت الاستمرارية: - نجعل المقام = 0 .

$x+2=0 \qquad x=-2 \quad \notin[-1.2]$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.2]$ لان $x=-2 \quad \notin[-1.2]$.

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.2) لان $x=-2 \quad \notin(-1.2)$

الدالة تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة ويوجد C يجعل ميل المماس =ميل الوتر . نجد ميل المماس

$$y'=\frac{\overbrace{(x+2)}^{\text{المقام}}\ \overbrace{(0)}^{\text{مشتقة البسط}}\ -\ \overbrace{(4)}^{\text{البسط}}\ \overbrace{1}^{\text{مشتقة المقام}}}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{-4}{(x+2)^2}$$

$$\text{ميل المماس}=g'(c)=\frac{-4}{(c+2)^2}$$

نجد ميل الوتر: -

$$F(a)=f(-1)=\frac{4}{-1+2}=\frac{4}{1}=4$$

$$F(b)=f(2)=\frac{4}{2+2}=\frac{4}{4}=1$$

$$b-a=2-(-1)=2+1=3$$

$$\text{ميل الوتر}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1-4}{3}=\frac{-3}{3}=-1$$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة C .

$$\frac{-4}{(c+2)^2}=-1$$

$$-1(c+2)^2=-4$$

$$(c+2)^2=\frac{-4}{-1}=4$$

$$(c+2)^2=4 \qquad \sqrt{\text{للطرفين}}$$

$$c+2=\mp 2$$

اما $c+2=+2$

$c=2-2=0 \ \in(-1.2)$

او $c+2=-2$

$c=-2-2=-4\notin \ (-1.2)$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة C.

$2c-6=0 \qquad 2c=6$

$c=3 \ \in(-1.7)$

$$f(x)=x^3-x-1 \qquad x\in[-1.2]$$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1.2]$ لانها كثيرة الحدود .

٢-الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1.2) لانها كثيرة الحدود .

الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة ويوجد C تجعل ميل المماس =ميل الوتر.

نجد ميل المماس

$$F'(x)=3x^2-1$$

$$\text{ميل المماس}=f'(c)=3c^2-1$$

نجد ميل الوتر: -

$$F(a)=f(-1)=(-1)^3-(-1)-1$$
$$=-1+1-1=-1$$

$$F(b)=f(2)=(2)^3-(2)-1=8-3=5$$

$$b-a=2-(-1)=2+1=3$$

$$\text{ميل الوتر}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{5-(-1)}{3}=\frac{6}{3}=2 \ \ (2)$$

هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة C.

$$3c^2-1=2$$

$$3c^2=1+2$$

$$3c^2=3$$

$$c^2=1$$

$$c=\mp 1$$

$c=1 \ \in(-1.2)$

$c=-1\notin(-1.2)$

النوع الخامس من الدوال

الجذور الفردية

دائما تكون مستمرة. ومجالها R

قابلية الاشتقاق لازم نشتق وحسب نوع ناتج الاشتقاق اذا صارت المشتقة كسرية نجعل المقام = ٠ ونجد قيمة X اذا تنتمي للفترة فأنها غير قابلة للاشتقاق والعكس صحيح.

اما اذا غير كسرية فهي قابلة للاشتقاق دائما.

$$d)\ B(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \qquad ,[-2,7]$$

$B(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

١-الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-2.7]$ لان دالة الجذر التكعيبي مجالها R.

٢-نشتق الدالة ونبسطها كلش

$$B'^{(x)} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

نجعل المقام =0

$x+1=0 \qquad x=-1 \in (-2.7)$

اذن الدالة غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-2.7) لان $x=-1 \in (-2.7)$.

الدالة لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة.

اعظم علماء الرياضيات

هل تعرف أعظمهم على الاطلاق؟ سنتعرف عليهم بالتسلسل التنازلي

المرتبة العاشرة فيثاغورس

فيثاغورس ساموس Pythagoras of Samos: عالم رياضيات وفيلسوف يوناني، ولد في عام ٥٨٠ ق.م. وتوفي في عام ٤٥٩ ق.م.، اشتهر بنظرية فيثاغورس التي تحمل اسمه (على الرغم من عثور على رقم طينية تحمل معلومات عن تناسب اضلاع المثلثات و الدوال المثلثية لدى البابليين) الا انها اشتهرت باسمه والتي تعد من أهم النظريات في علم الرياضيات وتعتبر قاعدة لمعظم النظريات الأخرى، كان فيثاغورس من أهم العلماء الذين ساهموا في تطوير الهندسة

النوع السادس من الدوال

دالة الجذر الزوجي

الحل يكون حسب البرنامج التالي: -

- نجد اوسع مجال للدالة بجعل ما تحت الجذر ≥ 0 ونحل المتباينة ونجد قيمة X. لتمثل قيم المجال المسموح بتعويضه.
- نثبت ان الدالة مستمرة حسب قواعد الاستمرارية الثلاثة لكل رقم من ارقام الفترة المفتوحة (معرفة –الغاية موجودة-الغاية=الدالة).
- ثم نثبت الاستمرارية على طرفي الفترة من جهة اليمين واليسار عندها ثبتنا الاستمرارية.
- اذا كانت الفترة بالسؤال تقع ضمن مجال الدالة فان الدالة قابلة للاشتقاق.
- ثم نكمل باقي خطوات الحل.

$$b)\ f(x) = \sqrt{25-x^2}, \quad x \in [-4,0]$$

نجد مجال الدالة.

تقلب → $25 \geq x^2 \qquad \mp x \leq 5 \quad 25-x^2 \geq 0 \qquad \sqrt{}$ للطرفين $\qquad x^2 \leq 25$

المتباينات من تاخذلهن الجذر خلي ($\mp$) يم x

اما $x \le 5$ او $-x \le 5$ $\times -1$ $x \ge -5$

اي متباينة تضرب في سالب تقلب علامة الاكبر. اذن مجال الدالة هو $-5 \le x \le 5$

مجال الدالة الفترة$[-5,5]$

١-نثبت الاستمرارية :-A-:- على الفترة المفتوحة $(-4,0)$

$I = (-4.0)$ $a \in I$

$1 - F(a) = \sqrt{25 - a^2}$ $\in R$ معرفة $2 - \lim_{x \to a} F(x) = \sqrt{25 - a^2} \in R$ موجودة

$3 - f(a) = \lim_{x \to a} F(x)$

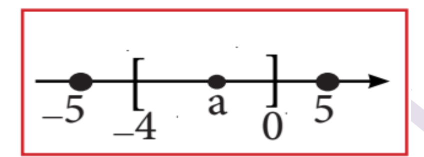
اذن الدالة مستمرة ضمن الفترة المفتوحة $(-4,0)$

B-نثبت ان الدالة مستمرة ضمن الاطراف .(بحيث نعوض (a) بالدالة ونعتبرها من اليسار ونعوض (b) بالدالة ونعتبرها يمين وثم نعوض بالمشتقة ولازم يطلع نفس الجواب).

$f(-4) = \lim_{x \to -4^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$, $f(0) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 0} = 5$

اذن الدالة مستمرة على طرفي الفترة .وهذا يعني ان الدلة مستمرة على الفترة$[-5,5]$

٢-بما ان مجال الدالة$[-5,5]$ والفترة المعطاة هي $(-4,0)$ وهي محتواة ضمن مجال الدالة اذن الدالة قابلة للاشتقاق



(شوف يعني اي رقم من الفترة ما يسبب مشكلة اذا اعوضه بالدالة لذلك نكول محتواة ضمن مجال الدالة).

اذن الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ويوجد c يجعل ميل المماس =ميل الوتر.

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$ ميل المماس $= f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{25 - c^2}}$

نجد ميل الوتر:-

$f(a) = f(-4) = \sqrt{25 - 16} = 3$,$f(b) = f(0) = \sqrt{25 - 0} = 5$,$b - a = 0 - (-4) = 4$

ميل الوتر $= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

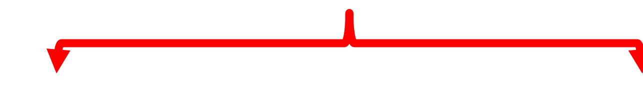
هسه نجعل ميل المماس =ميل الوتر ونطلع قيمة C .

$\frac{-c}{\sqrt{25 - c^2}} = \frac{1}{2}$ بالتربيع $4c^2 = 25 - c^2$ $c^2 + 4c^2 = 5$ $\to 5c^2 = 25$ $c^2 = 5$ للطرفين $\sqrt{}$

$c = \mp\sqrt{5}$ اما $c = -\sqrt{5}$ $\in (-1.2)$ او $c = \sqrt{5} \notin (-4.0)$

عندما تكون مبرهنة رول متحققة

حسب منطوق السؤال ومطلوب مجاهيل



نجد f'(x) ثم نعوض مكان x=c ونجعل F'(c)=0 لتصبح معادلة

نعوض قيمتي الفترة $[a.b]$ بالدالة الاصلية ثم نجعل $f(a)=f(b)$ لتصبح معادلة.

٢٠١٤خارج:- $f(x)=ax^2-4x+5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1.b]$ فاذا كانت $c=2\in(-1.b)$ فجد قيم $a.b\in R$

الحل :-

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول. اذن $f'(c)=0$

$f'(x)=2ax-4$ $\quad c=2 \quad 2a(2)-4=0 \quad 4a-4=0$

$4a=4 \quad a=\frac{4}{4}=1$

ولدينا $f(a)=f(b)$ دير بالك ترى نعوض بالدالة الاصلية قيم الفترة.

$f(a)=1(-1)^2-4(-1)+5=1+4+5=10$

$f(b)=1b^2-4b+5$

$\because f(a)=f(b)\rightarrow \quad b^2-4b+5=10$ نصفرها $b^2-4b-5=0$

$(b-5)(b+1)=0$ تجربة

اما $\quad b-5=0 \quad b=5 \quad [-1.5]$

او $\quad b+1=0 \quad b=-1 \quad [-1.-1]$

يهمل لان ما يصير الفترة من رقم الى نفس الرقم هذا يجعل قيمة C ما تنتمي وتناقض السؤال. لذلك تهمل.

اثرائي:- $f(x)=8-ax+x^2$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[h.4]$ فاذا كانت $c=3\in(h.4)$ فجد قيم $a.h\in R$

الحل :-

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول. اذن $f'(c)=0$

$f'(x)=-a+2x \quad c=3 \quad -a+2.3=0 \quad a=6$

$f(x)=8-6x+x^2$ الدالة

ولدينا $f(a)=f(b)$ دير بالك ترى نعوض بالدالة الاصلية قيم الفترة.

$f(a)=f(h)=8-6h+h^2$

$f(b) = f(4) = 8 - 6(4) + 4^2 = 8 - 24 + 16 = 0$

$\because f(a) = f(b) \rightarrow$ $8 - 6h + h^2 = 0$ نرتبها $h^2 - 6h + 8 = 0$

$(h-4)(h-2) = 0$ تجربة

اما $h - 4 = 0$ $h = 4$ يهمل $[4.4]$

او $h - 2 = 0$ $h = 2$ $[2.4]$

اذا القيمة المتوسطة متحققة.

- نجد ميل المماس من مشتقة الدالة وتعويض قيمة c.
- نجد ميل الوتر
- نجعل ميل الوتر=ميل المماس ونجد القيمة المجهولة في المعادلة او الفترة.

٢٠١٦د١ :- $f(x) = x^3 - 4x^2$ $f: [0.b] \rightarrow R$ وكانت Fدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند$\in$ $c = \frac{2}{3}$ $(h.4)$ فجد قيم $b \in R$

بما ان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة يوجد C تجعل ميل المماس=ميل الوتر.

نجد ميل المماس.

$F'(x) = 3x^2 - 8x$ ميل المماس $= f'(c) = F'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) = 3\frac{4}{9} - \frac{16}{3}$

$= \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{12}{3} = -4$

نجد ميل الوتر:-

$F(a) = f(0) = (0)^3 - 4(0)^2 = 0$ $F(b) = b^3 - 4b^2$

$b - a = b - (0) = b$

ميل الوتر $= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^3 - 4b^2 - 0}{b} = \frac{b^3 - 4b^2}{b} = \frac{b(b^2 - 4b)}{b} = b^2 - 4b$ $---2$

هسه نجعل ميل المماس=ميل الوتر ونطلع قيمة C.

$b^2 - 4b = -4$ $b^2 - 4b + 4 = 0$ $(b-2)(b-2) = 0$

$(b-2)^2 = 0$ $b - 2 = 0$ $b = 2$

المرتبة التاسعة

ليوناردو بيسانو : Leonardo Pisano BIgolloيعرف أيضا بليوناردو فيوناتشي ، عالم رياضيات ايطالي ، ولد في عام ١١٧٠م وتوفي في ١٢٥٠م ، هو من علماء الرياضيات موهبة في العصور الوسطى ، لقب بالعالم الحديث لنشره نظام الترقيم العربي في اوروبا ، واشتهر أيضا بمتتالية فيوناتشي التي سميت باسمه وله مساهمات كبيرة في تطوير حقل الرياضيات الحديثة .

قد يظن احدهم ان اسهامات بيسانو لا تستحق ان يوصف من الأعظم لكن نشره الترقيم العربي في اوربا قفز بالعلم الرياضي قفزة هائلة بعد ان كانت أوروبا تستخدم الترميز اللاتيني المزعج . لذلك هو واحد من العظماء.

٢٠١٧د٣:- $f:[0.n]\rightarrow R$ $f(x)=x^2-2x$ وكانت Fدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند5 $c=5$ فجد قيم $n\in R$

بما ان الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المعطاة يوجد C تجعل ميل المماس=ميل الوتر.

نجد ميل المماس.

$F'(x)=2x-2$ ميل المماس $=f'(c)=F'(5)=2.5-2=10-2=8$

نجد ميل الوتر:-

$F(a)=f(0)=(0)^2-2(0)=0$

$F(b)=f(n)=n^2-2n$

$b-a=n-(0)=n$

ميل الوتر $=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{n^2-2n-0}{n}=\dfrac{n^2-2n}{n}=\dfrac{n(n-2)}{n}=n-2$ $---2$

هسه نجعل ميل المماس=ميل الوترونطلع قيمة C.

$n-2=8$ $n=2+8=10$ $[0.10]$

المرتبة الثامنة .

فيلهلم لايبنتز: Wilhelm Leibnizعالم رياضيات وفيلسوف ألماني، ولد في عام ١٦٤٦ وتوفي في عام ١٧١٦ احتل مكانة مميزة في تاريخ الفلسفة والرياضيات. بدأ حياته كمحامي ثم اتجه للفلسفة والرياضيات، اشتهر باختراعه علم التفاضل والتكامل الرياضياتي وبفضله نحن الان نكتب هذه الاسطر، وكان من أكبر منتجي الآلات الحاسبة الميكانيكية، وقام باختراع عجلة ليبنتز التي استخدمت في المتر الحسابي. وعدل أيضا النظام الرقمي الثنائي.

المرتبة السابعة

السير إسحاق نيوتن

يمكنك القول عن نيوتن أنه فيزيائي، عالم رياضيات، عالم فلك، فيلسوف، كيميائي، لاهوتي، وواحد من أكثر الرجال تأثيراً في تاريخ البشرية. قدم كتابه "الأصول الرياضية للفلسفة الطبيعية" ليُصبح الكتاب الأكثر تأثيراً في تاريخ العلم.

قدم "نيوتن" قانون الجاذبية الأرضية الشهير، وقدم مساهمات هامة في مجال البصريات، وشارك في وضع أسس التفاضل والتكامل، وقام بصياغة قوانين الحركة وقانون الجذب العام، وقام بصناعة أول مقراب عاكس عملي، ووضع نظرية عن الألوان، كما صاغ قانون عملي للتبريد ودرس سرعة الصوت.

وقد إختاره علماء الجمعية الملكية في بريطانيا في إستطلاع أقامته الجمعية عام ٢٠٠٥ بأنه أكثر من أفاد العلم على مدار التاريخ.

أنا جاهل لا أعرف إلا حقيقة واحدة، وهي أنني لا أعرف شيئاً. –إسحاق نيوتن

يأتي نيوتن في المرتبة السابعة رياضيا

لكنه الأول تاثيرا في التاريخ على الاطلاق.

الجذر التربيعي	الجذر التكعيبي	الجذر الرابع	الجذر الخامس	الجذر السادس
$\sqrt{0}=0$	$\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt[4]{0}=0$	$\sqrt[5]{0}=0$	$\sqrt[6]{0}=0$
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt[3]{1}=1$	$\sqrt[4]{1}=1$	$\sqrt[5]{1}=1$	$\sqrt[6]{1}=1$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt[3]{8}=2$	$\sqrt[4]{16}=2$	$\sqrt[5]{32}=2$	$\sqrt[6]{64}=2$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt[3]{27}=3$	$\sqrt[4]{81}=3$	$\sqrt[5]{243}=3$	
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt[3]{64}=4$	$\sqrt[4]{256}=4$	$\sqrt[5]{1024}=4$	
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt[3]{125}=5$	$\sqrt[4]{625}=5$		
$\sqrt{36}=6$	$\sqrt[3]{216}=6$			
$\sqrt{49}=7$	$\sqrt[3]{343}=7$			
$\sqrt{64}=8$				
$\sqrt{81}=9$				
$\sqrt{100}=10$				
$\sqrt{121}=11$				
$\sqrt{144}=12$				
$\sqrt{169}=13$				
$\sqrt{196}=14$				
$\sqrt{225}=15$				
$\sqrt{256}=16$				

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة : - اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a.b]$ وكانت h=b-a ويؤدي الى $h \neq 0 \quad h \in R \quad b = a + h$ فانه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على ميل المماس=ميل الوتر

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

وعندما تكون b قريبة جدا من a تكون قيمة h صغيرة جدا ويكون الوتر صغيرا جدا وونهايتيه قريبتان من a أي ان المماس في c كانما يمس الدالة في a وبذلك نستطيع ان نعوض بمكان c قيمة a. لاحظ دقة النظرية (شرط ان تكون قيمة c قريبة جدا من a) لذلك عند فرض رقم قريب يجب ان يكون قريب جدا لكي نحصل على ادق جواب .

اشتقاق نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

ميل المماس=ميل الوتر

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

وعندما نعوض a مكان c لقربها منها نحصل

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \overset{\text{يؤدي}}{\Longrightarrow} f(a+h) \cong f(a) + h\,f'(a)$$

وضعت علامة التقريب لان الجواب يكون تقريبيا.

استخدام القيمة المتوسطة بالتقريب-نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

خطوات الحل:-

- تكوين الدالة : - نرفع الرقم الي مطلوب جذره او نتيجته (طبعا رقم مخربط او معقد ما تطلع نتيجته مباشرة) ونضع مكانه x.هاي نكتب-بمها دالة.
- نروح على الجهة اليمنى نسوي مستطيل نخلي بيه القيمة غير المضبوطة نسميها b ونفرض جواه قيمة مضبوطة تنطي ناتج سريعة نسميها a ونطلع الفرق بينهم حسب $h = b - a$.
- نعوض بالدالة قيمة a الي فرضناها والناتج يسمى $f(a)$.
- نطلع المشتقة ونعوض بيها قيمة a هميا والناتج نسميه $f'(a)$
- اذا طلب ناتج قيمة=او قيمة تقريبية لمقدار نطبق القانون التالي: -

القيمة التقريبية=الناتج المطلوب=$f(a+h) = f(a) + h\ f'(a)$

القيمة التقريبية=التعويض بالدالة+الفرق x التعويض بالمشتقة.

- اذا طلب منك بس مقدار التغير بالناتج او بالقيمة او بالحجم نطبق: -

التغير التقريبي=$h\ f'(a)$

الحالة الاولى :- وتتكون من فرعين :-

☒ الفرع الأول: - اذا كان المطلوب جذر معين. ناخذ رقم قريب له جذر شر. ونفرض الرقم المراد جذره x ونكمل الحل.

ملاحظات مهمة

- ✓ ما نتعامل هنا بالكسور الاعتيادية وانما بالعشرية فقط.
- ✓ اذا قسمت رقم قسمة طويلة لازم ناخذ ٣ مراتب اقل شيء.
- ✓ خطوات الحل هي

(تكوين دالة) $\overset{\text{ثم}}{\Rightarrow}$ (تعويض بالدالة)

$\overset{\text{ثم}}{\Rightarrow}$ (المشتقة) $\overset{\text{ثم}}{\Rightarrow}$ (تعويض بالمشتقة)

$\overset{\text{ثم}}{\Rightarrow}$ (القيمة التقريبية)

- ✓ شلون نعرف السؤال عن هذا الموضوع؟ من خلال الجمل التالية
(جد بصورة تقريبية) (باستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها جد وبصورة تقريبية)

مثال: - جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة تقريبية للمقادير التالية ومقربا الناتج لثلاث مراتب على الأقل.

$a)\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

جوهرة ثمينة :- شوف اذا الرقم محصور بين (1-0.90) يقرب الى ١ دائما يعني a=1

b=0.98

a=1.00=1

h=b-a=0.98-1

=-(1.00-0.98)

=-0.02

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3 = x^{\frac{2}{5}} + x^4 + 3$ (تكوين دالة)

$f(1) = 1^{\frac{2}{5}} + 1^4 + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{-2}{5}} + 4x^3$ (المشتقة)

$f'(1) = \frac{3}{5}(1)^{\frac{-2}{5}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a) \cong 5 + (-0.02 \times 4.6)$

$\cong 5 - 0.092 \cong 5.000 - 0.092 \cong 4.908$

$b)\sqrt[3]{7.8}$

جوهرة ثمينة: -اذا مطلوب جذر لرقم صحيح (موصفر) ووياه عدد عشري مثل هذا السؤال. لا تهتم بالعدد العشري خلي عينك بس ع العدد الصحيح وحل.

$b = 7.8$

$a = 8$

$h = b - a$

$h = 7.8 - 8$
$= -0.2$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (تكوين دالة)

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ (المشتقة)

$f'(8) = \frac{1}{3[8]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[2^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[2]^2} = \frac{1}{12} = 0.0833$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a) \cong 2 + (-0.2 \times 0.0833)$

$\cong 2 - 0.01666 \cong 2.00000 - 0.01666 \cong 1.98334$

$b)\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

$b=17$

$a=16$

$h=b-a$

$h=17-16=1$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$ (تكوين دالة)

$f(16)=\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}=4+2=6$ (تعويض بالدالة)

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$ (المشتقة)

$f'(16)=\frac{1}{2[16]^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4[16]^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2[4^2]^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4[2^4]^{\frac{3}{4}}}$

$=\frac{1}{2(4)}+\frac{1}{4(2)^3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{4+1}{32}=\frac{5}{32}$

$=0.156$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)\cong 6+(1\times 0.156)\cong 6.000+0.156$
$\cong 6.156$

$b)\sqrt[3]{0.12}=\sqrt[3]{0.120}$

جوهرة ثمينة:-اذا مطلوب الجذر لعدد عشري قيمة العدد الصحيح مالته صفرمثل (0.12) شنسوي؟

- بالبداية لازم نساوي عدد مراتب العدد مع دليل الجذر اذا كانت المراتب اقل من دليل الجذر.
- او نسوي المراتب من مضاعفاته باضافة اصفار للعدد على يمينه حتى ما يتاثر اذا كانت المراتب اكثر من دليل الجذر.يعني مثلا هسه بهذا السؤال عدد المراتب=2 بس دليل الجذر ثالث فلازم نضيف صفر كدام 12 . بعدين نعامل العدد وكانما ثلاثة مراتب ونفرض رقم قريب عليه وهمينا نخلي فارزة.

$b=0.120$

$a=0.125$

$h=0.120-0.125$
$=-0.005$

$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ (تكوين دالة)

$f(0.125)=\sqrt[3]{0.125}=0.5$ (تعويض بالدالة)

الجذر للعدد العشري هو جذر للعدد وللمراتب وعدد المراتب للعدد تكون دائما مساوية الى $\frac{\text{عدد المراتب}}{\text{دليل الجذر}}=$ يعني بهذا السؤال ناتج الجذر لازم بيه مرتبة وحدة.

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ (المشتقة)

$f'(0.125)=\frac{1}{3[0.125]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3[(0.5)^3]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3[0.5]^2}$

$=\frac{1}{3\times 0.25}=\frac{1}{0.75}=\frac{100}{75}=\frac{4}{3}=1.333$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h\,.f'(a) \cong 0.5 + (-0.005\ \times 1.333)$

$\cong 0.5 - 0.006665 \cong 0.500000 - 0.006665 \cong 0.403335$

تمارين: - جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة تقريبية للمقادير التالية ومقربا الناتج لثلاث مراتب على الأقل.

$)\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

$b = 63$

$a = 64$

$h = b - a$

$h = 63 - 64 = -1$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$ (تكوين دالة)

$f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ (المشتقة)

$f'(64) = \frac{1}{2[64]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3[64]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2[8^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3[4^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2(8)} + \frac{1}{3(4^2)}$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0.0833$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a) + h\,.f'(a) \cong 12 + (-1\ \times 0.0833) \cong 12.0000 - 0.0833$ $\cong 11.9167$

$c)\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$b = 9$

$a = 8$

$h = b - a$

$h = 9 - 8 = 1$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ (الدالة)

$f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$ (المشتقة)

$f'(8) = -\frac{1}{3[8]^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{3[2^3]^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3.2^4} = -\frac{1}{48}$

$= -0.02083$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h\,.f'(a)$

$\cong 0.5 + (1\ \times -0.02083)\ \cong 0.50000 - 0.02083 \cong 0.47917$



$d)\sqrt{\frac{1}{2}} =$ نحوله كسر عشري $= \sqrt{0.5} =$ نساوي المراتب $= \sqrt{0.50}$

$b = 0.50$

$a = 0.49$

$h = 0.50 - 0.49 = 0.01$

$f(x) = \sqrt{x}$ (تكوين دالة)

$f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (المشتقة بالطريقة السريعة)

$f'(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2 \times 0.7} = \frac{1}{1.4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} = 0.7142$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h\,.f'(a)$

$\cong 0.7 + (0.01 \times 0.7142)$

$\cong 0.70000 + 0.007142 \cong 0.707142$

يمكن حل السؤال أعلاه بطريقة أخرى بتوزيع الجذر على البسط والمقام ثم حله باعتبار المطلوب هو $\frac{1}{\sqrt{2}}$ لكن يعتبر الحل ليس دقيقا لماذا؟ أصل النظرية تكول انو كلما قلت قيمة h وأصبحت صغيرة يعني الجواب ادق يكون. لذلك بالحالة الأولى بالحل تكون $h = 0.01$ اما الحالة هاي فان قيمة h=1 والسلام.

٢٠٠٦-د٢: -جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{-9}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (الدالة)

$f(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$ (تعويض بالدالة)

$b = -9$

$a = -8$

$h = -9 - (-8) = -1$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ (المشتقة)

$f'(0.125) = \frac{1}{3[-8]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[(-2)^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[-2]^2}$

$= \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{12} = 0.0833$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h\,.f'(a) \cong -2 + (-1 \times 0.0833)$

$\cong -2 - 0.0833 \cong -2.0833$

٢٠١٧-د١:- جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[5]{(31)^{-1}}$

$b = 31$

$a = 32$

$h = 31 - 32 = -1$

$f(x) = \sqrt[5]{x^{-1}} = x^{-\frac{1}{5}}$ (الدالة)

$f(32) = \sqrt[5]{32^{-1}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} = 0.5$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = -\frac{1}{5}x^{\frac{-6}{5}} = -\frac{1}{5x^{\frac{6}{5}}}$ (المشتقة)

$f'(32) = -\frac{1}{5[32]^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5[(2)^5]^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5[2]^6} = -\frac{1}{5 \times 64}$

$= -\frac{1}{320} = -0.003125$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h \,.\, f'(a) \cong 0.5 + (-1 \times -0.003125)$

$\cong 0.5 + 0.00312$

٢٠٠٩-د١:- جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[4]{0.008}$

$b = 0.0080$

$a = 0.0081$

$h = 0.0080 - 0.0081$
$= -0.0001$

$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ (الدالة)

$f(0.0081) = \sqrt[4]{0.0081} = 0.3$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$ (المشتقة)

$f'(0.0081) = \frac{1}{4[0.0081]^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4[(0.3)^4]^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4[0.3]^3} = \frac{1}{4 \times 0.027}$

$= \frac{1}{0.108} = \frac{1000}{108} = 9.259$ $(\cong)$

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h \,.\, f'(a) \cong 0.3 + (-0.0001 \times 9.259)$
$\cong 0.3000000 - 0.0009259 \cong 0.2990741$

الفرع الثاني: - إذا طلب ناتج عدد مزعج مرفوع لاس معين. نرفع الرقم ونفرض رقم قريب عليه جدا بحيث الرقم المفروض ليس شرطا ان يكون له جذر وانما نقرب العدد المزعج لرقم أكبر منه او أصغر بحيث عند تعويضه يعطي ناتج سريع.

$b) (1.04)^3 + 3(1.04)^4$

شوف هسه هذا الرقم 1.04 مزعج ومخربط و اقرب رقم له يعطي ناتج سريع هو (١)

$b = 1.04$

$a = 1.00 = 1$

$h = b - a$

$h = 1.04 - 1 = 0.04$

$f(x) = x^3 + 3x^4$ (الدالة)

$f(1) = (1)^3 + 3(1)^4 = 1 + 3 = 4$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = 3x^2 + 12x^3$ (المشتقة)

$f'(1) = 3(1)^2 + 12(1)^3 = 3 + 12 = 15$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $= f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) = 4 + (0.04 \times 15) = 4.0 + 0.6 = 4.6$

++

$d) \dfrac{1}{101}$

$b = 101$

$a = 100$

$h = b - a$

$h = 101 - 100 = 1$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ (الدالة)

$f(100) = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{100} = 0.01$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ (المشتقة)

$f'(100) = -\dfrac{1}{[100]^2} = -\dfrac{1}{10000} = -0.0001$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong 0.01 + (1 \times -0.0001) \cong 0.0100 - 0.0001 \cong 0.0099$

مثال٦. اذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

جوهرة ثمينة: - مرات لا نحتاج الى تكوين الدالة وانما تعطى بالسؤال جاهزة فقط نباشر بالحل.

$b = 1.001$

$a = 1$

$h = b - a$

$h = 1.001 - 1 = 0.001$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ (الدالة)

$f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$ (المشتقة)

$f'(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h\,.f'(a)$

$\cong 13 + (0.001 \times 13)$

$\cong 13.000 + 0.013 \cong 13.013$

وزاري. اذا كان $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ فجد بصورة تقريبية $f(1.02)$

$b = 1.02$

$a = 1$

$h = b - a$

$h = 1.02 - 1 = 0.02$

$f(x) = \sqrt[5]{31x+1} = (31x+1)^{\frac{1}{5}}$ (الدالة)

$f(1) = \sqrt[5]{31(1)+1} = \sqrt[5]{32} = 2$ (تعويض بالدالة)

$f'(x) = \frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}\ 31 = \frac{31}{5(31x+1)^{\frac{4}{5}}}$ (المشتقة)

$f'(1) = \frac{31}{5[31(1)+1]^{\frac{4}{5}}} = \frac{31}{5[32]^{\frac{4}{5}}} = \frac{31}{5[2^5]^{\frac{4}{5}}} = \frac{31}{5[2]^4} = \frac{31}{5 \times 16}$

$= \frac{31}{80} = 0.387$ (التعويض بالمشتقة)

القيمة التقريبية $\cong f(a+h) \cong f(a) + h\,.f'(a) \cong 2 + (0.02 \times 0.387)$

$\cong 2.00000 + 0.00774 = 2.00774$

الحالة الثانية

المعطى :- طول ضلع معقد، نصف قطر معقد، ارتفاع معقد.

المطلوب :- حجم او مساحة او محيط لشكل هندسي معين.

خطوات الحل

- تكوين د الة = قانون حجم الشكل او مساحته.
- لازم الدالة يبقى بيها بس المعطى و المطلوب واذا اكو متغير ثالث لازم يحذف عن طريق علاقة ثانوية تعطى بالسؤال.
  ويحدث هذا في حالة الأسطوانة والمخروط و المتوازي سطوح . طبعا ينطي بالسؤال مثلا (القطر يساوي الارتفاع) نعتبرها علاقة ثانوية.
- ثم باقي الخطوات نفسها د الة وتعويض ثم مشتقة وتعويض و قيمة تقريبية للحجم او المساحة.

تمارين-وزاري: - مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي 2.98cm فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة او نتيجتها.

- جوهرة ثمينة: - بهاي الحالة لازم تفرض الفرضية للرموز الي بالدالة.
- الارتفاع او طول الضلع او نصف القطر يقرب الى أقرب رقم وليس شرطا ان يكون له جذر. أنسي موضوع الجذور بعد راح وي الاعزاز.
- بحالة المخروط نحذف نصف القطر او الارتفاع واغلب الأسئلة نحذف نصف القطر.

نفرض ان حجم المخروط $= V$ ونصف قطره $= r$ وارتفاعه $= h$.

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad ----1$$

[منطي هنا الارتفاع و مطلوب الحجم فلازم نشيل نصف القطر

وتبقى العلاقة بين الارتفاع والحجم فقط]

منطي معلومة بالسؤال يكول الارتفاع = القطر.

$$h = 2r \qquad r = \frac{h}{2} \qquad r^2 = \frac{h^2}{4} \quad ----2$$

نعوض معادلة 2 في 1.

$$v = \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{4} h = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$v = \frac{\pi}{12} h^3$$ (هسه صارت عندي دالة)

تكوين دالة

$$v(3) = \frac{\pi}{12} 3^3 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$$ (التعويض بالدالة)

$$v'(h) = \frac{\pi}{12} 3 h^2 = \frac{\pi}{4} h^2$$ (المشتقة)

$$v'(3) = \frac{\pi}{4} 3^2 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$$ (تعويض بالمشتقة)

$b = 2.98$

$a = 3$

$h = 2.98 - 3 = -0.02$

حجم المخروط تقريبا

$$v = v(a) + h\, v'(a) = 2.25\pi + (-0.02 \times 2.25\pi) =$$ عامل مشترك

$$= 2.25\pi - 0.045\pi = 2.205\pi cm^3$$

٢٠١٥ د1\\ جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية اذا كان طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه ويساوي 3.99cm.

نفرض ان حجم المخروط $= V$ ونصف قطره $= r$ وارتفاعه $= h$.

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad ----1$$

منطي معلومة بالسؤال يكول الارتفاع = نصف القطر.

$$2r = h \qquad r = \frac{h}{2} \qquad r^2 = \frac{h^2}{4} \quad ----2$$

نعوض معادلة 2 في 1 .

$$v = \frac{\pi}{3}\frac{h^2}{4} h = \frac{\pi}{12}\, h^3$$

$$v = \frac{\pi}{12}\, h^3$$ (هسه صارت عندي دالة)

$$v(4) = \frac{\pi}{12}\, 4^3 = \frac{16\pi}{3}$$ (التعويض بالدالة)

$$v'(h) = \frac{\pi}{12} 3h^2 = \frac{\pi}{4} h^2$$ (المشتقة)

$$v'(4) = \frac{\pi}{4} 4^2 = 4\pi$$ (تعويض بالمشتقة)

$b = 3.99$

$a = 4$

$h = 3.99 - 4$
$= -0.01$

حجم المخروط تقريبا

$$v = v(a) + h\, v'(a) = \frac{16\pi}{3} + (-0.01 \times 4\pi) = \text{عامل مشترك} = \pi(5.333 - 0.04)$$
$$= \pi(5.333 - 0.040) == 5.293\pi cm^3$$

المرتبة السادسة

الان تورنج : Alan Turingعالم حاسوب و رياضيات انجليزي، ولد في عام ١٩١٢ وتوفي في ١٩٥٤، هو مؤسس علم الحاسوب الحديث، واشتهر بنظريات الذكاء الاصطناعي والنظرية الرياضية للظواهر البيولوجية وساهم في تطوير النظام العقدي. ويُعتبر الأب الروحي لعلم الحاسوب الحديث، قام بدراسة الرياضيات في جامعة كامبريدج ثم قام بالتدريس فيها لاحقاً ووضع مفهومه الذى ينص على إنه لا يمكن حل أو حساب جميع المشاكل الرياضية بالطريقة التلقائية، ويعتبر هذا المفهوم هو الأساس لمفهوم الحاسبات الحديثة وهو ما يعرف الآن بإسم "آلة تورنج".

تأتي أهمية نموذج "آلة تورنج" في بساطته مقارنة بجهاز الحاسوب المعقد، وبالرغم من ذلك فهو قادر على تنفيذ كل قاعدة خوارزمية قابلة للتنفيذ بواسطة أي حاسوب متطور، لذلك يمكن معرفة فيما إذا كانت عملية معينة قابلة للتنفيذ بواسطة الحاسوب أم لا عن طريق فحصها بواسطة "آلة تورنج"، وهذا ما يعرف بإسم "قابلية الحساب".

خلال الحرب العالمية الثانية كان له دوراً محورياً فى فك شفرات البحرية الألمانية ليوفر بذلك معلومات حيوية ومخابراتية لبريطانيا وللحلفاء.

كتاب :- متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته، جد ا حجم التقريبي له عندما يكون طول قطر قاعدته 2.97cm ؟

نفرض طول قاعدة المتوازي =X والعرض =X (لأنها مربعة) والارتفاع = 3X . وحجمه =V

$V = (\text{الطول})(\text{العرض})(\text{الارتفاع}) = x.x.3x = 3x^3$ (الدالة)

$V(3) = 3(3)^3 = 81$ (التعويض بالدالة)

$V'(x) = 9x^2$ (المشتقة)

$V'(3) = 9(3)^2 = 81$ (التعويض بالمشتقة)

$b = 2.97$

$a = 3$

$h = 2.97 - 3 = -0.03$

حجم متوازي السطوح تقريبا

$v = v(a) + h\,v'(a) = 81 + (-0.03 \times 81) = 81 - 2.43 = 78.57cm^3$

لو كان المطلوب المساحة لكان الحل فقط الدالة تختلف وشوي راح نعاني بيها. باوع شوف شلون أكون الدالة:- قاعدة المتوازي مستطيلات هي عبارة عن مستطيل لكن بهذا السؤال يكول القاعدة مربعة.

$A = ([\text{مربع}]\text{محيط القاعدة})(\text{الارتفاع}) + 2(\text{مساحة القاعدة})$

$= 4x.3x + 2x^2 = 12x^2 + 2x^2$

$A = 14x^2$ (الدالة)

$A = 14(3)^2 = 14 \times 9 = 126$ (تعويض الدالة)

$A' = 28x$ (مشتقة)

$A' = 28 \times 3 = 84$ (تعويض المشتقة)

مساحة متوازي السطوح تقريبا

$A = A(a) + h\,A'(a) = 126 + (-0.03 \times 84) = 126 - 2.52 = 123.48cm^2$

مثال-وزاري " – مكعب طول حرفه 9.98cm جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة

نفرض طول ضلع المكعب =X والحجم =V

$b = 9.98$

$a = 10$

$h = 9.98 - 10 = -0.02$

$V = (\text{طول الضلع})^3 = x^3$ الدالة

$V(10) = (10)^3 = 1000$ التعويض بالدالة

$V'(x) = 3x^2$ المشتقة

$V'(10) = 3(10)^2 = 300$ التعويض بالمشتقة

حجم المكعب تقريبا

$$v = v(a) + h\,v'(a) = 1000 + (-0.02 \times 300) = 1000 - 6 = 994cm^3$$

2016 د2 :-جد حجم كرة بصورة تقريبية اذا كان طول نصف قطرها يساوي 3.001cm ؟.

نفرض ان حجم الكرة = V ونصف قطرها = r.

$b = 3.001$

$a = 3$

$h = 3.001 - 3 = 0.001$

دالة $v = \frac{4\pi}{3} r^3$

التعويض بالدالة $v(3) = \frac{4\pi}{3} 3^3 = 4\pi \times 9 = 36\pi$

المشتقة $v'(r) = \frac{4\pi}{3} 3r^2 = 4\pi r^2$

تعويض بالمشتقة $v'(3) = 4\pi\, 3^2 = 36\pi$

حجم المخروط تقريبا

$$v = v(a) + h\,v'(a) = 36\pi + (0.001 \times 36\pi) = 36\pi(1 - 0.001)$$
$$= 36\pi(1.000 - 0.001) = 36\pi(0.999) = 35.965\pi cm^3$$

الحالة الثالثة

المعطى :- حجم الشكل او مساحته كرقم معلوم

المطلوب :- نصف القطر او طول الضلع او الارتفاع بصورة تقريبية.

والحل :-

- قبل تكوين الدالة نكتب قانون حجم الشكل او مساحته.
- نعوض قيمة الحجم او المساحة المعطاة كرقم ونختصر الطرفين ثم وسطين بطرفين.
- يبقى بالأخير $r^2 = (\text{رقم})$ او $L^3 = (\text{رقم})$ وبأخذ الجذر للطرفين يتحول الموضوع الى موضوع الحالة الأولى
- يعني يتحول الى موضوع مطلوب جذر لعدد ليس له جذر. ونبلش بنفس الخطوات مالت الحالة الاولى

2017 د2 :-كرة حجمها $84\pi\ cm^3$ جد بصورة تقريبية نصف قطرها باستخدام القيمة المتوسطة.

مادام منطي حجم الكرة وطالب نصف القطر يعني الحالة الثالثة ، لا تنسى الفرضية دائما

نفرض حجم الكرة = V ونصف قطرها = r .

$v = \frac{4\pi}{3} r^3$ وبالاختصار $\rightarrow 84\pi = \frac{4\pi}{3} r^3$

$21 = \frac{r^3}{3}$ طرفين في وسطين $r^3 = 63$ $\sqrt[3]{\ }$ للطرفين

$r = \sqrt[3]{63}$

شوف هسه تحول الموضوع الى الحالة الاولى لان طلع جذر لرقم ماله جذر راح نحله حسب الحالة الاولى .

$b = 63$
$a = 64$
$h = 63 - 64 = -1$

الدالة $r(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

تعويض بالدالة $r(64) = \sqrt[3]{64} = 4$

المشتقة $r'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$r'(64) = \frac{1}{3[64]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[(4)^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3[4]^2}$

التعويض بالمشتقة $= \frac{1}{3 \times 16} = \frac{1}{48} = 0.0208$

نصف القطر تقريبا $\cong r(a+h) \cong r(a) + h . r'(a) \cong 4 + (-1 \times 0.0208)$

$\cong 4.000 - 0.0208 \cong 3.972\ cm$

2013 - عامة :-مخروط حجمه $210\pi\ cm^3$ جد بصورة تقريبية نصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه 10cm باستخدام القيمة المتوسطة.

مادام منطي حجم المخروط وطالب نصف القطر يعني الحالة الثالثة ، لا تنسى الفرضية دائما

نفرض حجم المخروط = V ونصف قطرها = r وارتفاعه= h .

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$ وبالاختصار $\rightarrow 210\pi = \frac{\pi}{3} r^2 . 10$

$21 = \frac{r^2}{3}$ طرفين في وسطين $r^2 = 63$ $\sqrt[2]{\ }$ للطرفين

$r = \sqrt[2]{63}$

شوف هسه تحول الموضوع الى الحالة الاولى لان طلع جذر لرقم ماله جذر راح نحله حسب الحالة الاولى.

$b = 63$

$a = 64$

$h = 63 - 64$
$= -1$

$r(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$r(64) = \sqrt{64} = 8$ تعويض بالدالة

$r'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة بالطريقة السريعة

$r'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2 \times 8} = \frac{1}{16} = 0.0625$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= r(a+h) = r(a) + h\,.r'(a) = 8 + (-1 \times 0.0625) = 8.0000 - 0.0625$
$= 7.9375\ cm$

تمارين : جد باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة قيمة تقريبية لضلع مربع مساحته $101\ cm^2$ ؟

نفرض ان مساحة المربع =A وطول ضلعه l =

$A = L^2$ $\quad 101 = L^2$ $\quad \sqrt{\text{للطرفين}}$

$L = \sqrt{101}$

شوف هسه تحول الموضوع الى الحالة الاولى لان طلع جذر لرقم ماله جذر راح نحله حسب الحالة الاولى .

$b = 101$

$a = 100$

$h = 101 - 100$
$= 1$

$L(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$L(100) = \sqrt{100} = 10$ تعويض بالدالة

$L'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة بالطريقة السريعة

$L'(100) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{2 \times 10} = \frac{1}{20} = 0.05$ التعويض بالمشتقة

القيمة التقريبية $= l(a+h) = L(a) + h\,.L'(a) = 10 + (1 \times 0.05) = 10.00 - 0.05$
$= 10.05\ cm$

الحالة الرابعة

المعطى: -طول ضلع او نصف قطر او ارتفاع او عدد ليس له جذر

المطلوب :-١-التغير التقريبي لدالة او التغير التقريبي لحجم او مساحة انتبه زين شنو المطلوب بعد خالك.

٢-واكو شغلة مهمة لازم تنتبه عليها. شنو؟ إذا انطاك جسم صلب بس مطلي بطلاء او حوله جليد او مغلف بشيء ومطلوب منك كمية الطلاء او الجليد فيقصد اوجد التغير التقريبي حجم.

الحل

١-نكتب الدالة وما نعوض بيها ٢-نطلع المشتقة ونعوض بيها. ٣-نكتب قانون التغير التقريبي الي هو: -

$$\text{التغير التقريبي} = h \quad f'(a)$$

مثال :-لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا كانت x تغيرت من 8 الى 8.06 فجد مقدار التغير التقريبي لf؟

ملحوظة: -إذا كالك يابه قيمة x تغيرت من (رقم) الى (رقم) تعتبر الي بعد من =a والي بعد الى =b وبعد ما تفرض قيم من يمك. شوف بعد خالك المطلوب هو التغير التقريبي.

$b = 8.06$

$a = 8$

$h = 8.06 - 8 = 0.06$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ الدالة

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$ مباشر الى المشتقة

$f'(8) = \frac{2}{3[8]^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3[(2)^3]^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3[2]^1}$

$= \frac{2}{3 \times 2} = \frac{1}{3} = 0.333$ التعويض بالمشتقة

$\text{التغير التقريبي} = h\,.f'(a) = (0.06 \times 0.333) = 0.01998$

٢٠١٧-د٣:- باستخدام مفهوم التفاضلات جد بصورة تقريبية مساحة حلقة نصف قطرها الداخلي 20cm ونصف قطرها الخارجي 20.3 cm؟

ملحوظة: -الحلقة تمثل شكل قشرة دائرية لذلك المطلوب هنا التغير التقريبي للمساحة

$b = 20.3$

$a = 20$

$h = 20.3 - 20 = 0.3$

$A = \pi r^2$ الدالة

$A' = 2\pi r$ مباشر الى المشتقة

$A'(20) = 2\pi(20) = 40\pi$ التعويض بالمشتقة

مساحة الحلقة $= h\,.\,A'(a) = 0.3 \times 40\pi = 12\pi\ cm^2$

تمارين:- كرة نصف قطرها 6cm طليت بطلاء سمكه 0.1cm جد كمية الطلاء بصورة تقريبية؟

جوهرة ثمينة

- ☒ ما دام مطلوب حجم الطلاء يعني التغير التقريبي لحجم الكرة.
- ☒ بحالة الطلاء فان قيمة a=طول الجسم الأصلي او نصف القطر الأصلي بدون الطلاء
- ☒ b=طول الجسم الأصلي+سمك الطلاء حيث يضرب السمك ب (٢) في حالة المكعب والمربع والمستطيل اما الكرة فيضاف مرة واحدة فقط.

نفرض ان حجم الكرة = V ونصف قطرها = r .

$b = 6.1$

$a = 6$

$h = 6.1 - 6 = 1$

$v = \frac{4\pi}{3} r^3$ هسه صارت عندي دالة

$v'(r) = \frac{4\pi}{3} 3r^2 = 4\pi r^2$ المشتقة

$v'(6) = 4\pi\ 6^2 = 144\pi$ تعويض بالمشتقة

حجم الطلاء تقريبا =كمية التغير التقريبي فقط حتى لو ما كايلي انا هيج أسوي خوشن.

$$v = h\ v'(a) = 0.1 \times 144\pi = 14.4\pi cm^3$$

تمارين:- يراد طلاء مكعب طول ضلعه 10 cm فاذا كان سمك الطلاء 0.15cm اوجد حجم الطلاء تقريبيا؟

مادام جسم صلب ومغطى بطبقة طلاء ومطلوب كمية الطلاء لذلك يعني المطلوب التغير التقريبي للحجم .

$b = 10 + 0.15 + 0.15 = 10.3$

$a = 10$

$h = 10.3 - 10 = 0.3$

نفرض طول ضلع المكعب =X والحجم =V

$V = x^3$ الدالة

$V'(x) = 3x^2$ المشتقة

$V'(10) = 3(10)^2 = 300$ التعويض بالمشتقة

حجم الطلاء تقريبا

التقريبي التغير $= h\ v'(a) = (0.3 \times 300) = 90cm^3$

ملاحظة جدا جدا مهمة :- لو كان المطلوب حجم المكعب بعد الطلاء بدلا من حجم الطلاء فان الحل سوف يكون مثل الحل السابق بكافة خطواته وكانما السؤال حالة ثانية . وبعد خالك انتبه لدقة الملاحظة وافهمها زين.

$V = x^3$ الدالة

$V(10) = 10^3 = 1000$ الدالة

$V'(x) = 3x^2$ المشتقة

$V'(10) = 3(10)^2 = 300$ التعويض بالمشتقة

حجم المكعب بعد الطلاء تقريبا

$V = V(a) + h\, v'(a) = 1000 + (0.3 \times 300) = 1090 cm^3$

المرتبة الخامسة

رينيه ديكارت :René Descartes عالم رياضيات وفيزياء وفيلسوف وضابط وبحار فرنسي ، ولد في عام ١٥٩٦ وتوفي في عام ١٦٥٠ ، اشتهر بنظام الاحداثيات الديكارتية والهندسة التحليلية ، واخترع فكرة القياسية التي تساعد على إظهار الأسس أو الصلاحيات ، وكان من أشهر علماء الثورة العلمية ، وهو صاحب مقولة "أنا أفكر، إذن أنا موجود"

المرتبة الرابعة مناصفة

اقليدس :Euclid اقليدس الاسكندري، عالم رياضيات يوناني ولد في عام ٣٠٠ ق.م. ، اشتهر بكتابه العناصر الذي كان له تأثيرا كبيرا في تاريخ الرياضيات وخصوصا في الهندسة وتم استخدامه في تدريس الرياضيات بداية من نشره وحتى بداية القرن العشرين ، لقب بأبو الهندسة . يعتبر إقليدس أبو الهندسة بكل جدارة و أعظم ما أبدعه هو مجموعة من الأبحاث و الأوراق التي عرفت بـ " أصول إقليدس " و التي كانت لا تزال تستخدم في التعليم حتى القرن العشرين .

ينسب لإقليدس أيضا التعليمات الدقيقة والمنطقية التي تتبع عند برهنة النظريات و لا يزال مثل هذه الطرق مستخدما إلى وقتنا الحالي.

المرتبة الرابعة مناصفة

أوغستين لوي كوشي (بالفرنسية: Augustin-Louis Cauchy؛ تُلفظ: [o.gys'tɛ̃ lwi ko'ʃi]) هو رياضياتي فرنسي. ولد في الواحد والعشرين من غشت/اغسطس عام ١٧٨٩ وتوفي في ٢٣ مايو عام ١٨٥٧.

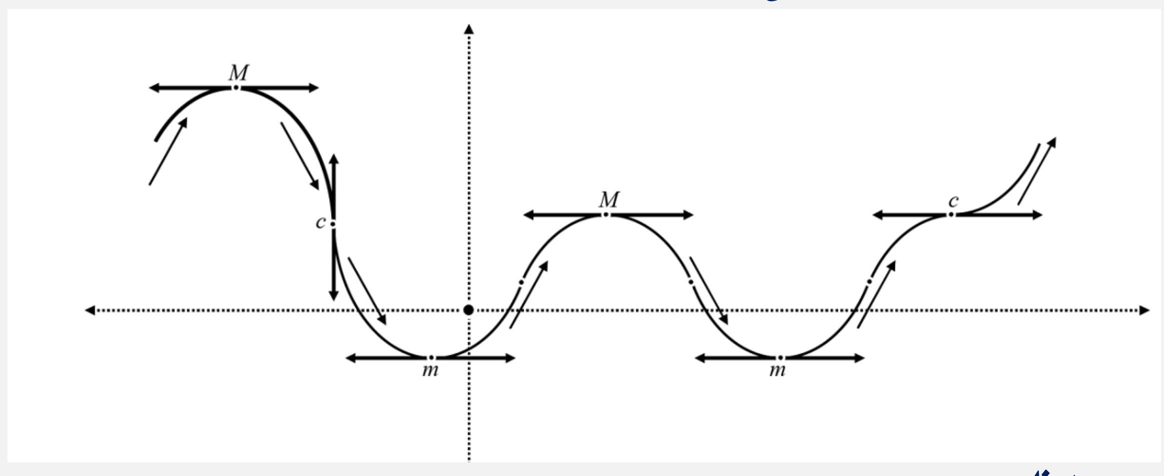
بدأ كوشي مشروعا لصياغة وإثبات نظريات الحساب المتناهي في الصغر على نحو دقيق وكان بذلك من رواد التحليل الرياضي. ووضع أيضا العديد من النظريات الهامة في التحليل المركب وبدأ أيضا دراسة مجموعات التباديل. وبصفته رياضيا ضليعا عبر طرقه الواضحة والدقيقة كان له تأثير واسع على معاصريه ولاحقيه. تغطي كتاباته نطاقاً كاملاً من الرياضيات والفيزياء الرياضية.

قدم عالم الرياضيات أوغستين لويس كوشي الكثير من الأبحاث والاكتشافات العلمية في الرياضيات والتي من بينها ما يلي :

١. ا عمل على تقديم نظرية التوابع القابلة للانشقاق والتي تعد واحدة من بين أهم الأعمال التي قد عمل كوشي على تقديمها خلال الأبحاث التي قد قام بها .
٢. كما تناول العديد من الأعمال من خلال البحث والتي من بينها ما يلي التوسع في السلسلة وفي الحاصل النهائي وغيرها من النظريات .
٣. كما كانت له شهرة كبيرة حول الطريقة التي يقوم من خلالها بتدريس الرياضيات بالتعاون مع الكثير من معلمي الرياضيات.
٤. كما كان له شهرة كبيرة خاصة بالمعادلات التفاضلية وقد عمل على وضع نظرية كوشي الخاصة بإيجاد المزيد من الحلول .
٥. عمل في الرياضة البحتة والكثير من فروع علم الرياضيات ليكون له بصمة في كل علم منهم .
٦. كما كان له أعمال أولي من بينها نظرية الموجات والميكانيك.
٧. نظرية الدوال العقدية.
٨. مبرهنة تايلور.
٩. كما تم تسمية الكثير من الطرق الخاصة به باسمه من بينها الصيغة المتكاملة عند كوشي .

الان هل تود معرفة اعظم ٣ علماء رياضيات على الاطلاق ؟ انتظر في الصفحات القادمة

النهايات العظمى والصغرى والحرجة ومناطق التزايد والتناقص



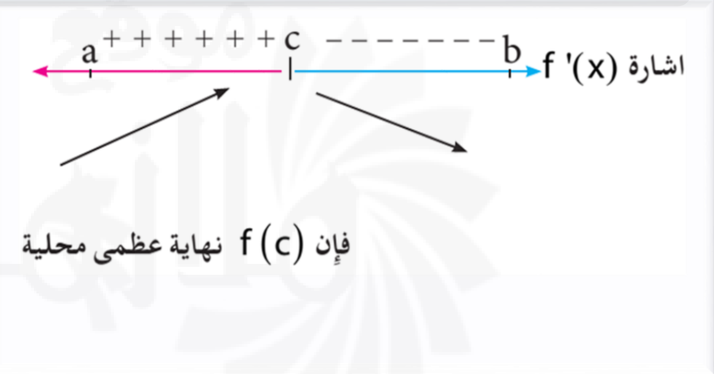
النهاية المحلية العظمى: - اعلى قيمة تصل اليها الدالة في سلوكها.

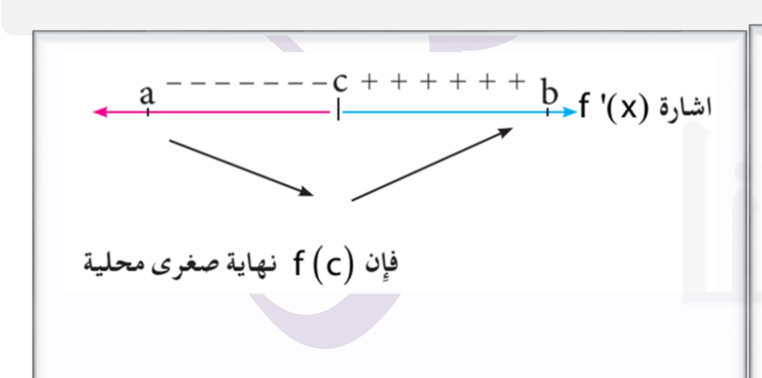
النهاية المحلية الصغرى: - اقل قيمة تصل اليها الدالة في سلوكها.

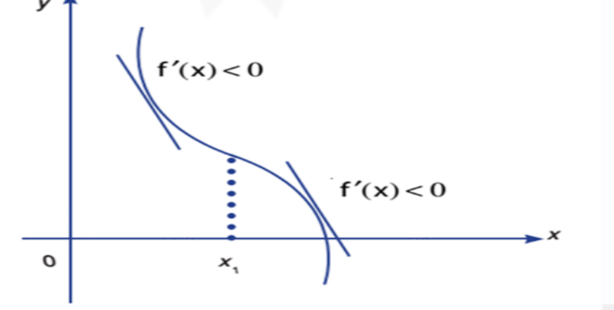
مناطق التزايد: -المناطق التي يكون فيها سلوك الدالة متزايد او الميل موجب. وعكسها تسمى مناطق التناقص.

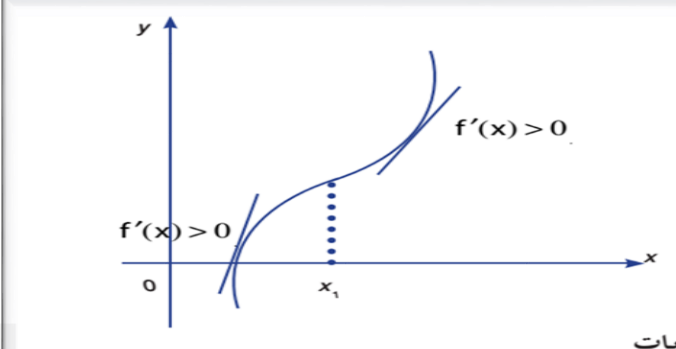
ولكي نجد النهايات والمناطق نقوم بما يلي: -

- نجد f'(X)
- نجعلها f'(x)=0 نحلها ونجد قيمة x
- نعوض x بالدالة الاصلية ونجد قيمة y .
- صارت عند نقطة M(X.Y)
- اخذ قيمة X والمشتقة وروح على خط الاعداد خلي قيمة X واخذ رقم اكبر منها واصغر وعوضه بالمشتقة وشوف اشارة ناتج المشتقة موجب لو سالب وخلي الاشارات على خط الاعداد حسب المكان مالتها.









لا توجد نهايات

- ✓ بالنسبة للأسهم تبدأ دائما من اليسار الى اليمين.
- ✓ شلون نكتب مناطق التزايد والتناقص. اعلى خط الاعداد نضع جهة اليمين $(x > a)$ واليسار من x نضع دائما $(x < a)$
- ✓ نكتب مناطق التزايد والتناقص بحيث نباوع على الإشارات. التزايد نكتب الكتابة الي فوك (+) والتناقص نكتب الي اشارته (-)

امثلة –كتاب:- جد النهايات ونوعها وحدد مناطق التزايد والتناقص لكل مما يأتي؟

$y = f(x) = x^2$

المشتقة $f'(x) = 2x$

نصفرها $f'(x) = 0$

نرتبها $2x = 0 \quad \div 2$

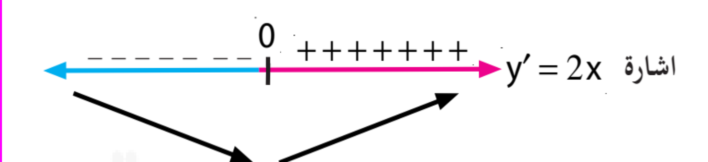
$x = 0$

(نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة).

$f(0) = (0)^2 = 0$

(صارت عندي نقطة هي (0.0))

نختبر قيمة x على خط الاعداد ناخذ رقم اكبر واقل ونعوضه بالمشتقة ونشوف اشارته)



النقطة $(0,0)$ نهاية صغرى محلية (وادي).

مناطق التزايد(يمين) $=\{x; x > 0\}$

مناطق التناقص (يسار) $=\{x; x < 0\}$

ملاحظة مهمة

اذا طلعن اكثر من قيمة لـx لازم يطلعن بعددهن نقاط

ومن نرسم خط الاعداد لازم ناخذ قيمتي x ونرسمهن بدون اهمال واحدة او اخذ كل رقم على حدة .لازم اثنينهن سوية.

وبحالة الكتابة مناطق التزايد والتناقص نكتب الرقمين وبوسطهم x ونكتب اكبر واصغر .شوف المثال الي جوى

$F(x) = 1 - (x - 2)^2$

المشتقة $f'(x) = -2(x - 2)$

نصفرها $f'(x) = 0$

نرتبها $-2(x - 2) = 0 \quad \div -2$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

(نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة).

$f(2) = 1 - (2 - 2)^2 = 1$

صارت عندي نقطة هي (2.1)

هسه ناخذ قيمة x ونخليهم على خط الاعداد.



النقطة $(2,1)$ نهاية عظمى محلية (جبل).

مناطق التزايد(يسار) $=\{x; x < 2\}$

مناطق التناقص (يمين) $=\{x; x > 2\}$

==========================

ملاحظة :- اذا اشتقيت وطلعت المشتقة عبارة عن

$$\left[\frac{\text{رقم}}{\text{دالة}} \neq 0\right]$$

نكول عنها لا تساوي صفر. ونتعامل وأياها كالتالي :-

- النهاية فلا توجد دائما خوشنن.
- التزايد والتناقص موجود
- نجعل المقام=0 ونجد قيمة X وتكون الدالة عندها غير معرفة. نضع فجوة ع خط الاعداد ونختبرها ونطلع التزايد والتناقص من المشتقة



$$f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$$

المشتقة $f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$

نصفرها $f'(x) = 0$

نرتبها $9 + 6x - 3x^2 = 0 \quad \div -3$

نحللها $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

اما $x - 3 = 0 \qquad x = 3$

او $x + 1 = 0 \qquad x = -1$

(نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة)

$f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3$

$= 27 + 27 - 27 = 27$

صارت عندي نقطة هي (3.27)

$f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3$

$= -9 + 3 + 1 = -5$

صارت عندي نقطة هي $(-1.-5)$

/ هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة/

قيمة x=-1 راح اخذ أكبر منها واقل واعوضه بالمشتقة.

$f'(-2) = 9 + 6(-2) - 3(-2)^2$

$= 9 - 12 - 12 = -15$

الاشارة سالب على جهة الاقل من -1

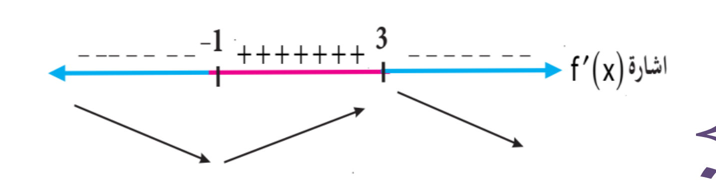
$f'(0) = 9 + 6(0) - 3(0)^2 = +9$

الاشارة موجب على جهة الاكبر من -1

قيمة x=3 راح اخذ اكبر منها واقل واعوضه بالمشتقة

$f'(4) = 9 + 6(4) - 3(4)^2$

$= 9 + 24 - 48 = -15$



$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

المشتقة $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$

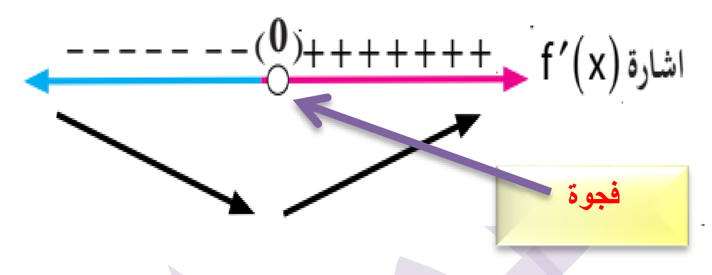
لا توجد نهايات

هسه هاي الدالة راح اخلي المقام =0 واطلع الفجوة X=0

/ هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة./

$f'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{1}} = +$

$f'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{-1}} = -$



مناطق التزايد(يمين) $=\{x; x > 0\}$

مناطق التناقص (يسار) $=\{x; x < 0\}$

فد ملاحظة

- إذا طلعت نقطة نهاية واختبرتها على خط الاعداد وطلعت اشارتها من الجهتين سالب او من الجهتين موجب فهاي النقطة تكتب عليها حرجة فقط.
- بالنسبة لعلامة الأكبر والصغر شلون نحددهن لاحظ المخطط التالي الثابت دائما لكل عدد

$x < a$	X=a	$x > a$

$(-1.-5)$ نقطة نهاية صغرى محلية
(3.27) نقطة نهاية عظمى محلية
مناطق التزايد= $\{x; -1 < x < 3\}$
مناطق التناقص= $\{x; -1 > x > 3\}$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ المشتقة $f'(x) = 0$ نصفرها

$3x^2 - 18x + 24 = 0$ $\div 3$ نرتبها $x^2 - 6x + 8 = 0$ نحللها

$(x-4)(x-2) = 0$ اما $x - 4 = 0$ $x = 4$

او $x - 2 = 0$ $x = 2$

(نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة)

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24 \times 4 = 64 - 144 + 96 = 16$

صارت عندي نقطة هي (4.16)

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24.2 = 8 - 36 + 48 = 20$

صارت عندي نقطة هي (2.20)

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة .

قيمة $x=2$ راح اخذ أكبر منها واقل واعوضه بالمشتقة.

$f'(1) = 3(1)^2 - 18(1) + 24 = 3 - 18 + 24 = 9$

الاشارة موجب على جهة الاقل من 2

$f'(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 24 = 27 - 54 + 24 = -15$

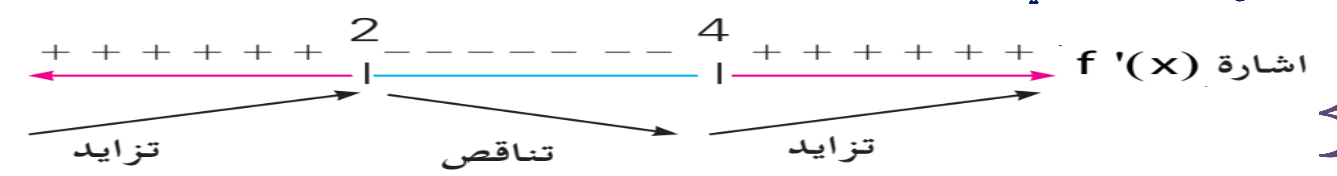
الاشارة سالب على جهة الاكبر من 2

قيمة $x=4$ راح اخذ اكبر منها واقل واعوضه بالمشتقة .

$f'(5) = 3(5)^2 - 18(5) + 24 = 75 - 90 + 24 = 9$

الاشارة موجب على جهة الاكبر من 4

نمسح التعويض ونخلي بس خط الاعداد وعليه الاشارات



(4.16) نقطة نهاية صغرى محلية — (2.20) نقطة نهاية عظمى محلية

مناطق التناقص $=\{x; 2 < x < 4\}$ — مناطق التزايد $=\{x; 2 > x > 4\}$

مناطق التحدب والتقعر ونقاط الانقلاب

١-نجد F''(X) ٢-نجعل F''(X)=0 ٣-نحلها ونطلع قيمة X ٤-نعوضها بالدالة الاصلية ونطلع Y .

٥-صارت عندك نقطة (X,Y) ضمها بجيبك .

٦-اخذ قيمة X والمشتقة الثانية واختبرها على خط الاعداد كامر بنا سابقا .

٧-اذا المشتقة الثانية سالب فان الدالة محدبة عندها . واذا كانت موجبة فأنها مقعرة

٨-اذا تغيرت الدالة من محدبة الى مقعرة او من مقعرة الى محدبة نكول عن النقطة بانها نقطة انقلاب . واذا ابقت نفسها ماتغيرت نكول لا توجد نقطة انقلاب .

٩-نكتب مناطق التحدب والتقعر.

س\\\ جد نقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر لكل من الدوال التالية.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ المشتقة

$f''(x) = 12x - 6$ المشتقة الثانية

$f''(x) = 0$ نصفرها

$12x - 6 = 0 \quad \div 6$ نرتبها

$2x - 1 = 0$ نحللها

$2x = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \times \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 1$$

$$= \frac{-2}{4} - 5 = \frac{-2-20}{4} = -\frac{22}{4}$$

$$= -\frac{11}{2}$$

صارت عندي نقطة هي $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$

هسه ناخذ قيمة x ونخليهم على خط الاعداد ونأخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة الثانية

$$f(x) = x^3$$

$f'(x) = 3x^2$ المشتقة

$f''(x) = 6x$ المشتقة الثانية

$f''(x) = 0$ نصفرها

$6x = 0 \quad \div 6$

$x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = (0)^3 = 0$

صارت عندي نقطة هي (0.0) ونختبرها .

- - - - - - - - 0 + + + + + + + اشارة $f''(x)$

تحدب — تقعر

f محدبة في $\{x: x < 0\}$ — f مقعرة في $\{x: x > 0\}$

(0.0) نقطة انقلاب

شوف التقعر صاير يمين لذلك خليت علامة الاكبر على x والتحدب عكسه.

بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة.

$f''(1) = 12(1)^2 - 6 = 6$

الاشارة موجب على جهة الاكبر من $\frac{1}{2}$

$f''(0) = 12(0)^2 - 6 = -6$

الاشارة سالب على جهة الاصغر من $\frac{1}{2}$

مناطق التقعر(يمين)= $\{x; x > \frac{1}{2}\}$

مناطق التحدب (يسار)= $\{x; x < \frac{1}{2}\}$

$f(x) = 4x^3 - x^4$

المشتقة $f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

المشتقة الثانية $f''(x) = 24x - 12x^2$

نصفرها $f''(x) = 0$

نرتبها $24x - 12x^2 = 0 \quad \div 12$

عامل مشترك $2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

اما $x = 0$ او

$2 - x = 0 \quad x = 2$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة.

$f(0) = 4(0)^3 - (0)^4 = 0$

صارت عندي نقطة هي (0.0)

$f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 32 - 16 = 16$

صارت عندي نقطة هي (2.16)

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة الثانية بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة.

$h(x) = 4-(x+2)^4$

المشتقة $f'(x) = -4(x+2)^3$

المشتقة الثانية $f''(x) = -12(x+2)^2$

نصفرها $f''(x) = 0$

$-12(x+2)^2 = 0 \quad \div -12$

$(x+2)^2 = 0$ $\sqrt{}$ للطرفين

X+2=0 x=-2

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة.

$f(-2) = 4 - (-2+2)^4 = 4$

صارت عندي نقطة هي (-2.4) ونختبرها.

مناطق التحدب= $\{x; x > -2\}$

مناطق التحدب= $\{x; x < -2\}$

ولا توجد نقطة انقلاب لان الدالة محدبة من جهتين.

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

تبسيط $f(x) = x + x^{-1}$

المشتقة $f'(x) = 1 - x^{-2}$

$f'(x) = 0 - 2x^{-3}$

المشتقة الثانية $= -\frac{2}{x^3}$

لا توجد انقلاب

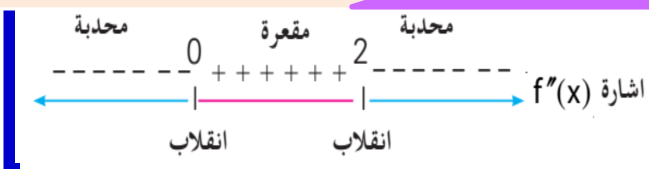
هسه هاي الدالة راح أخلي المقام =0 واطلع الفجوة

$x^3 = 0 \quad x = 0$

هسه ناخذ قيمتين x ونخليهم على خط الاعداد و ناخذ رقم اكبر ورقم اصغر ونعوضهم بالمشتقة الثانية بس شفهيا بعدين نمسح التعويض بس علمود نعرف الاشارة.

$,f'(1) = -\frac{2}{1^3} = -$

$f'(-1) = -\frac{2}{-1^3} = +$



(0.0) نقطة انقلاب

(2.16) نقطة انقلاب

مناطق التحدب $= \{x; 0 > x > 2\}$

مناطق التقعر $= \{x; 0 < x < 2\}$

$$f(x) = 3 - 2x - x^2$$

المشتقة $f'(x) = -2 - 2x$

المشتقة الثانية $f''(x) = -2 < 0$

اذا اشتقيت وطلعت المشتقة بس رقم. ما بيها x هاي عبارة خاطئة اذا نخليها =0 لذلك شتسوي؟

مباشرة نكول الدالة لا تمتلك نقطة انقلاب اما التحدب والتقعر فنشوف اشارة الرقم لتمثل التحدب والتقعر.

هسه بهذا المثال الاشارة سالبة.

الدالة محدبة عند كل R.

والدالة لا تمتلك نقطة انقلاب.

------ 0 ++++++

$f''(x)$ اشارة

محدب مقعر

مناطق التحدب - يسار $= \{x; x < 0\}$

مناطق التقعر - يمين $= \{x; x > 0\}$

ولا توجد نقطة انقلاب لان $f''(0)$ لان المشتقة الثانية غير معرفة عند x=0.

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$$

المشتقة $f'(x) = 4x^3 + 6x$

المشتقة الثانية $f''(x) = 12x^2 + 6$

نصفرها $f''(x) = 0$

$12x^2 + 6 \neq 0$

لا توجد نقاط انقلاب والدالة مقعرة عند كل R مجموع مربعين اكبر من صفر ومستحيل يساوي صفر لذلك لا توجد نقطة انقلاب و بما انها اكبر من صفر لذلك تكون مقعرة عند كل R.

طريقة أخرى لتحديد نوع النهايات العظمى والصغرى

اختبار المشتقة الثانية

- ☒ نشتق مرة و نجعل المشتقة = 0
- ☒ ونجد قيمة X. ما نروح لخط الاعداد وانما للمشتقة الثانية.
- ☒ نطلع المشتقة الثانية.
- ☒ نعوض قيمة X بالمشتقة الثانية ونشوف الناتج مالتها.
- ☒ اذا اطلب قيمة النهاية لازم نطلع قيمة Y وتصير عدنا نقطة (X,Y) .
- ✓ اذا اطلع الناتج من عوضت x مال المشتقة الثانية موجب (مقعرة) يعني الدالة تمتلك نهاية صغرى
- ✓ وإذا إشارة المشتقة الثانية سالب (محدبة) يعني تمتلك نهاية عظمى.
- ✓ واذا اطلع الناتج=صفر. فالطريقة فاشلة ونرجع من جديد الى خط الاعداد ونحل بيه ونحترم أنفسنا.
- ☒ شوكت نستخدم هاي الطريقة.
  - ❖ أ-اذا اطلب منك تستخدمها
  - ❖ ب-اذا اطلعت قيمة X مال النهاية وبيها قيمة غير معلومة وما تكدر تستخدم خط الاعداد لتحديد نوع النهاية. هنا نستخدم هاي الطريقة تنقذنا . مهم .

مثال :– باستخدام اختبار المشتقة الثانية ان امكن .جد النهايات المحلية للدوال التالية.

$$f(x) = 6x - 3x^2 - 1$$

$f'(x) = 6 - 6x$ نجعل $f'(x) = 0$

$6 - 6x = 0 \rightarrow$

$6x = 6 \rightarrow$

$x = 1$

هسه نطلع المشتقة الثانية .

$f''(x) = -6$

هسه نعوض قيمة x بالمشتقة الثانية .

$f''(1) = -6$

ماكو x اعوض بيها لذلك يبقى الناتج نفسه . ومادام الناتج سالب اذن توجد نقطة نهاية عظمى للدالة. ومطلوب مني اطلع النقطة همينا . ماكو اشكال . اعوض قيمة x بالدالة الاصلية وابوك الله يرحمه .

$f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1$

$= 6 - 3 - 1 = 2$

اذن النقطة هي (1,2) وهي نهاية عظمى محلية.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ نجعل

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \qquad \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ تجربة

$(x-3)(x+1) = 0$

اما $x - 3 = 0 \qquad x = 3$

او $x + 1 = 0 \qquad x = -1$

هسه نطلع المشتقة الثانية .

$f''(x) = 6x - 6$

هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية.

$f''(3) = 6 \, . \, 3 - 6$

$= 12$ توجد نهاية صغرى

$f''(-1) = 6 \, . \, (-1) - 6$

$= -12$ توجد نهاية عظمى

عند x=3 توجد نهاية صغرى لان الناتج موجب.
وعند x=-1 توجد نهاية عظمى لان الناتج سالب.
ومطلوب مني اطلع النقطة همينا. ماكو اشكال. اعوض قيمة x بالدالة الاصلية وابوك الله يرحمه.

$f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9 \times 3$

$= 27 - 27 - 27 = -27$

اذن النقطة هي (3,-27) وهي نهاية صغرى محلية .

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9.(-1)$

$= -1 - 3 + 9 = 5$

اذن النقطة هي (-1,5) وهي نهاية عظمى محلية.

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}$$

$f(x) = x - 4x^{-2}$ تبسيط

$f'(x) = 1 + 8x^{-3}$ المشتقة

$f'(x) = 0 \qquad 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \qquad \times x^3 \rightarrow x^3 + 8 = 0 \rightarrow x^3 = -8 \qquad \sqrt[3]{للطرفين}$

$x = -2$

هسه نطلع المشتقة الثانية.

$$f''(x) = -24x^{-4} = -\frac{24}{x^4}$$

نعوض قيمة x بالمشتقة الثانية. توجد نهاية عظمى

$$f''(-2) = -\frac{24}{(-2)^4} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$$

وعند x=-2 توجد نهاية عظمى لان الناتج سالب.
ومطلوب مني اطلع النقطة همينا. ماكو اشكال. اعوض قيمة x بالدالة الاصلية

$$f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$$

اذن النقطة هي (-2,-3) وهي نهاية عظمى محلية.

$$f(x) = 4 - (x+1)^4$$

$f'(x) = -4(x+1)^3$ $f'(x) = 0$ نصفرها

$-4(x+1)^3 = 0 \quad \div -4 \quad \rightarrow (x+1)^3 = 0$ $\sqrt[3]{\text{للطرفين}}$ $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

هسه نطلع المشتقة الثانية

$$f''(x) = -12(x+1)^2$$

هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية.

$$f''(-1) = -12(-1+1)^2 = 0$$

الطريقة فاشلة ولازم نروح ع خط الاعداد ونحترم أنفسنا



اذن توجد نهاية عظمى محلية عند x=-1
ومطلوب مني اطلع النقطة همينا . ماكو اشكال .اعوض قيمة x بالدالة الاصلية وابوك الله يرحمه .

$$f(-1) = 4 - (-1+1)^4 = 4$$

اذن النقطة هي (-1,4) وهي نهاية عظمى محلية .

المرتبة الثالثة

برنارد ريمان: Bernhard Riemannعالم رياضيات الماني، ولد في عام ١٨٢٦ وتوفي في ١٨٦٦، له مساهمات كثيرة في نظرية الأعداد والهندسة التفاضلية والتحليل، له عدة نظريات سميت باسمه كنظرية ريمان التي تتعلق بتابع زيتا ريمان التي تقول أن القسم الحقيقي من الجذور العقدية لهذا التابع تساوي نصف دوما ، واشتهر بتوزيع الأعداد الأولية ، ويتمتع بمهارات رياضية استثنائية . العالم الألماني الذي نشأ في أسرة فقيرة سيكبر ليصبح أحد أعظم علماء الرياضيات في القرن التاسع عشر.

قائمة إسهاماته في الهندسة كبيرة كما قام بوضع عديد النظريات من إنجازاته على سبيل المثال: هندسة ريمان، سطوح ريمان ، تكامل ريمان. أكثر ما هو مشهور فيه نظريته الأسطورية المشهورة: وهي عبارة عن معادلة معقدة جدا في توزع الأعداد الأولية. لم يتم إعطاء هذه النظرية حقها خلال خمسين بعد وضعها من قبله و ذلك لقلة عدد علماء الرياضيات الذين استطاعوا فهمها .لكنها لاحقا برزت لتصبح أحد أبرز الأسئلة المفتوحة بدون حل في العلم الحديث و قد حيرت أعظم علماء الرياضيات . حتى أن أحد المراكز البحثية وضع جائزة قدرها مليون دولار لمن يقوم بإثباتها. النتيجة المترتبة على مثل هذا الإثبات يعتقد بأنها مهمة جدا و ذات أثر واسع. يعتقد بأن أنظمة ترميز كبرى سيتم كسرها في حال حدث ذلك ، لذلك حتى بعد موته لا زال ريمان مؤثرا و مساهما في تطوير الرياضيات الحديثة !.

ايجاد قيم الثوابت a , b , c

ملاحظات قبل الحل

- ينطي معادلة بيها مجاهيل هم (a,b,c,....) وينطي معلومات عنهم.
- عدد المعلومات تساوي عدد المجاهيل
- لازم المعلومات تحولها الى معادلات بعدد المجاهيل ثم نباشر بحل المعادلات انيا او بالتعويض لنجد المجاهيل.

الحالة الاولى

اذا اعطى نهاية عظمى، صغرى، حرجة.

✓ اذا اعطى فقط قيمة x=n منها.

- نجد f '(x)
- نعوض x=n
- نجعل f '(n)=0

✓ اذا اعطى نقطة النهاية كاملة $(x.y)$

- نعوض النقطة بالدالة الاصلية.
- نجد f '(x) ونعوض x=n ثم نجعلها=صفر

اذا اعطى نقطة انقلاب للدالة

❖ اذا اعطى فقط قيمة x=n منها.

- نجد f ''(x)
- نعوض x=n
- نجعل f ''(n)=0

❖ اذا اعطى نقطة الانقلاب كاملة $(x.y)$

- نعوض النقطة بالدالة الاصلية.
- نجد f ''(x) ونعوض x=n ثم نجعلها=صفر

مثال-٢٠١٥-٢٠١٣:- عين قيمتي الثابتين a, b لكي يكون لمنحني الدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند x=-1 ونهاية صغرى محلية عند x=2 ، ثم جد نقطة الانقلاب ان وجدت .

الحل (لاحظ معطى فقط x من النهاية)

∵للمنحني نهاية عظمى عند x=-1

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad \therefore f'(-1) = 0$

معاليم = مجاهيل ← ثم $3 - 2a + b = 0$ ← $3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0$

$-2a + b = -3 \quad (1)$

∵ المنحني نهاية صغرى عند x=2

$3(2)^2 + 2a(2) + b = 0$ $\qquad \therefore f'(2) = 0$

{ هسه صارن عندي معادلتين نخلي وحدة جوى الثانية ونحل انيا بعد نحذف واحد من المجاهيل }

$4a + b = -12 \quad (2)$ معاليم = مجاهيل $12 + 4a + b = 0$

$-2a + b = -3 \quad (1)$

$\mp 4a \mp b = \pm 12 \quad (2)$

بالطرح-------------------------

$-6a = 9 \qquad a = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

نعوض بأسهل معادلة وليكن معادلة ١

$-2\left(-\frac{3}{2}\right) + b = -3 \rightarrow 3 + b = -3 \qquad b = -3 - 3 = -6$

نكتب الدالة ونطلع نقطة الانقلاب. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$f''(x) = 6x - 3$ نجعل $f''(x) = 0$

$6x - 3 = 0 \qquad 6x = 3 \qquad x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

اعوض قيمة x بالدالة الاصلية ونطلع قيمة y.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3 = -\frac{2}{8} - 3 = -\frac{1}{4} - 3 = \frac{-1-1}{4} = -\frac{13}{4}$$

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$

نتأكد من كونها نقطة انقلاب ناخذ قيمة x والمشتقة الثانية ونختبرها جوارينها.(تاكد منها انت)

$\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$ هي نقطة انقلاب

٢٠٠٧د١:-اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2$ فجد قيم $a, b \in R$ اذا علمت ان $(1,2)$ نقطة انقلاب للمنحني

∵ (1,2) نقطة انقلاب تنتمي للدالة ∴ تحقق معادلتها.

$2 = a(1)^3 + b(1)^2$

$2 = a + b$ ندور المعادلة

$a + b = 2 \quad --(1)$

∵ للدالة نقطة انقلاب عند X=1

$\therefore F''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$6a(1) + 2b = 0 \qquad \div 2$

$3a + b = 0 \quad ---(2)$

نحل المعادلتين انيا بالحذف.

$a + b = 2$

$\mp 3a \mp b = 0$

بالطرح-------------------------

$-2a = 2 \qquad a = -1$

نعوض في معادلة ١ (لان اسهل)

$-1 + b = 2 \qquad b = 2 + 1 = 3$

تمارين–٢٠١١–خ :–ليكن $(2,6)$ نقطة حرجة للدالة $f(x) = a - (x-b)^4$ فجد قيم $a,b \in R$ ثم بين نوع النقطة الحرجة.

∵ (2,6) النقطة الحرجة تنتمي للدالة ∴ تحقق معادلتها.

$$6 = a - (2-b)^4 \quad --(1)$$

∵للدالة نقطة حرجة عند x=2

$$\therefore f'(2) = 0$$
$$f'(x) = -4(x-b)^3$$
$$f'(2) = 0 \quad \rightarrow\rightarrow$$
$$-4(2-b)^3 = 0$$

م{ادام معادلة بيها مجهول واحد نبسطها ونطلع قيمة b.}

$$-4(2-b)^3 = 0 \qquad \div -4$$

$(2-b)^3 = 0$ $\sqrt[3]{\text{للطرفين}}$ $2-b=0$ $b=2$

نعوض في معادلة 1.

$6 = a - (2-2)^4$ $a = 6$

{نطلع نوع النقطة الحرجة يعني يقصد هل هي عظمى لو صغرى ناخذ قيمة x وخط الاعداد والمشتقة الاولى ونختبر جوارين x.}

$$f'(x) = -4(x-2)^3$$

أشارة $f'(x)$: $x<2$ (+ + +) ، 2 ، $x>2$ (− − −)

اذن النقطة (2.6) تمثل نقطة نهاية عظمى محلية.

وزاري:–ليكن الدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ تمتلك نقطة نهاية صغرى عند x=4 ونقطة انقلاب عند x=1فجد قيم $a,b \in R$.

∵ الدالة تمتلك نقطة نهاية عند X=4

$$\therefore F'(4) = 0$$
$$F' = 3x^2 + 2ax + b$$
$$3(4)^2 + 2a(4) + b = 0$$
$$48 + 8a + b = 0$$
$$8a + b = -48 \quad --(1)$$

∵للدالة نقطة انقلاب عند X=1

$$.\therefore F''(1) = 0$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$
$$6 + 2a = 0 \qquad \div 2$$
$$a = -3$$

نعوض في معادلة١.

$$8(-3) + b = -48$$

$-24 + b = -48$ $b = -48 + 24$ $b = -24$

٢٠٠٩د١ :–ليكن $(1,-2)$ نقطة حرجة للدالة $f(x) = ax^2 - (x+b)^2$ فجد قيم $a,b \in R^+$ ثم بين نوع النقطة الحرجة.

∵ (1,-2) النقطة الحرجة تنتمي للدالة ∴ تحقق معادلتها.

$$-2 = a(1)^2 - (1+b)^2$$
$$a - (1+b)^2 = -2 \quad --(1)$$

∵للدالة نقطة حرجة عند x=1

$$\therefore f'(1) = 0$$
$$f'(x) = 2ax - 2(x+b)$$
$$2a(1) - 2(1+b) = 0$$
$$2a - 2(1+b) = 0 \quad \div 2 \qquad a - 1 - b = 0$$
$$a = 1 + b \quad (2)$$

ملاحظة مهمة: - لا يمكن حل معادلتين انيا بالحذف اذا كانت احداهما درجة أولى والأخرى درجة ثانية وانما الحل بالتعويض فقط. نعوض (٢)في معادلة (1)

$$1 + b - (1 + 2b + b^2) = -2$$
$$1 + b - 1 - 2b - b^2 + 2 = 0 \quad \times -1$$
$$b^2 + b - 2 = 0$$
$$(b+2)(b-1) = 0$$

اما $b+2=0 \quad b=-2$ **او** $b-1=0 \quad b=1$

تهمل ($b=-2$) لان المطلوب قيم a,b تنتمي لـ r الموجب) نعوض في معادلة (٢)

$$a = 1 + 1 = 2$$

نحدد نوع النقطة في اختبار المشتقة 2 أسرع.

$$f'(x) = 2ax - 2(x+b)$$
$$f''(x) = 2a - 2 = 2 \times 2 - 2 = 2$$
$$f''(1) = 2 \quad \text{مقعرة}$$

اذن النقطة $(1, -2)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية.

ملاحظة مهمة جدا: -

- ☒ **مرات ما ينطي نقطة الانقلاب او نقطة النهاية بصورة مباشرة وانما مثلا يكول الدالة مقعرة او محدبة أكبر وأصغر من (رقم) فهنا يقصد للدالة انقلاب عند x= الرقم.او متزايدة ومتناقصة أكبر وأصغر من رقم.يعني للدالة نقطة نهاية عند x=الرقم المعطى.**
- ☒ **شلون نحل ٣ معادلات ب٣ مجاهيل**
- ✓ **تأخذ معادلتين متشابهات بعدد المجاهيل**
- ✓ **نحذف احد المجاهيل بحيث يبقن مجهولين بشرط تطلع معادلة تشبه المعادلة المتروكة .**
- ✓ **ثم من المعادلة الجديدة و المتروكة يعلبون على النهائي ويطلع مجهول .**
- ✓ **نعوض هذا المجهول بمعادلة بيها مجهولين ونجد مجهول اخر وهكذا.**
- ☒ **شوف حبي كل f(x)=y يعني كل f(x) هي نفسها y مالت النقطة فمو تدوخ من نعوض مكان f(x) .**

تمارين –٢٠١٧ خارج: –اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ مقعرة لكل $x > 1$ ومحدبة لكل $x < 1$ و f تمتلك نهاية عظمى محلية هي $(-1,5)$ فجد قيم $a,b\ .\ c \in R$.

∵ الدالة محدبة $x < 1$ ومقعرة لكل $x > 1$
اذن توجد نقطة انقلاب عند x=1

$f''(1) = 0$ اذن

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$6a(1) + 2b = 0 \quad \div 2$

$3a + b = 0 \quad ---(1)$

النقطة $(-1,5)$ العظمى تنتمي للدالة تحقق معادلتها .

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$5 = -a + b - c$

$-a + b - c = 5 \quad --(2)$

∵ المنحني نهاية عظمى عند x=-1

$\therefore f'(-1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$

$3a - 2b + c = 0 \quad ---(3)$

(صارن عندي 3 معادلات]من معادلة 2 ومعادلة 3 (لان متشابهات .)

$3a - 2b + c = 0 --- (3)$

$-a + b - c = 5 \quad --(2)$

$2a - b = 5 \quad --- (4)$

$3a + b = 0 \quad --- (1)$

$5a = 5 \qquad a = 1$

نعوض بأسهل معادلة ونجد المجاهيل

$3(1) + b = 0$

$3 + b = 0 \qquad b = -3$

نعوض a,b في معادلة 2.

$-1 - 3 - c = 5 \qquad c = -4 - 5 = -9$

الحالة الثانية

عندما يعطي مستقيم يمس الدالة ويعطي نقطة تماس

☒ نعوض نقطة التماس بالدالة الاصلية وتصير معادلة.
ملحوظة مهمة كل معادلة درجة أولى هي معادلة خط مستقيم حتى لو ما كايل بالسؤال.

١-نجد ميل المستقيم=مشتقة معادلة المستقيم.

٢-نجد ميل المماس=مشتقة الدالة.

٣-نعوض x من نقطة التماس بميل المماس.

٤-نجعل ميل المستقيم = ميل المماس لتصبح معادلة أيضا.

٢٠١٤-١٥-١٦-تمارين: -المستقيم 3x−y=7 يمس المنحني $f(x) = ax^2 + bx + c$ عند $(2.-1)$ وللمنحني نقطة نهاية صغرى عند $x=\frac{1}{2}$ فجد قيم $a,b\,.\,c \in R$.

نقطة التماس $(2.-1)$ تنتمي للدالة . تحقق معادلتها.

$-1 = a(2)^2 + b(2) + c$ $\qquad$ $4a + 2b + c = -1 \quad --(1)$

نجد ميل المستقيم (نشتق معادلته ومادام دالته ضمنية نشتق ضمنيا).

$3 - y' = 0$ $\qquad$ $y' = 3$

نجد ميل المماس (نشتق معادلة المنحني ونعوض بيه x مالت نقطة التماس حتى يصير جاهز كلش).

$f'(x) = 2ax + b$ $\qquad$ $x = 2$ ونعو

$f'(2) = 2a(2) + b = 4a + b$

هسه نساوي الميلان.

$4a + b = 3 \quad ---2$

نحتاج بعد معادلة لان ٣ مجاهيل. $\qquad$ بما ان للمنحني نهاية صغرى عند $x=\frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ $\qquad$ $f'(x) = 2ax + b$

$2a(\frac{1}{2}) + b = 0$ $\qquad$ $a + b = 0 \quad ---(3)$

صارن عندي 3 من معادلة 2 ومعادلة 3 لان متشابهات .

$4a + b = 3 \quad ---2$

$a + b = 0 \quad ---(3) \times -1$

$4a + b = 3 \quad ---2$

$-a - b = 0 \quad ---(3')$

$3a = 3$ $\qquad$ $a = 1$

نعوض في معادلة٣

$1 + b = 0$ $\qquad$ $b = -1$

نعوض فيa.b معادله 1

$4(1) + 2(-1) + c = -1$ $\qquad$ $4 - 2 + c = -1$ $\qquad$ $c = -1 - 2 = -3$

مثال-٢٠٠٩-٢٠١٧ : اذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ وكان مقعرفي $x < 1$ ومحدب في $X > 1$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3,1)$ فجد قيمة $a.b.c \in R$.

∵ الدالة محدبة $x > 1$ ومقعرة لكل $x < 1$
فانه توجد نقطة انقلاب عند x=1

اذن $f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$6a(1) + 2b = 0 \quad \div 2 \qquad 3a + b = 0 \quad ---(1)$

نقطة التماس (3.1) تنتمي للدالة . تحقق معادلتها.

$1 = a(3)^3 + b(3)^2 + c \qquad 27a + 9b + c = 1 \quad --(2)$

نجد ميل المستقيم (نشتق معادلته ومادام دالته ضمنية نشتق ضمنيا).

$y' + 9 = 0 = 0 \qquad y' = -9$

نجد ميل المماس (نشتق معادلة المنحني ونعوض بيه x مالت نقطة التماس حتى يصير جاهز كلش).

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ ونعوض $x = 3$

$f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) = 27a + 6b$

ميل المستقيم =ميل المماس عند نقطة التماس

$27a + 6b = -9 \quad \div 3$

$3a + 2b = -3 \quad --- 3$

ومن معادلة 1و3 .

$3a + b = 0 \quad --- 1 \times -2$

$3a + 2b = -3 \quad --- (3)$

$-6a - 2b = 0 \quad --- 1'$

$3a + 2b = -3 \quad --- (3)$

$-3a=-3 \qquad a=1$

نعوض في معادلة (١)

$3(1) + b = 0 \qquad b = -3$

نعوض في معادلة ٢

$27(1) + 9(-3) + c = 1 \qquad \therefore c = 1$

فد جم ملاحظة مهمة شوف كبد عمري

- ☒ مرات ممكن ما ينطي نقطة التماس كاملة بحيث ينطي منها بس قيمة x فقبل ان تباشر بالحل تعوض x بمعادلة المستقيم وتطلع y بعدين تنطلق بخطوات الحل.
- ☒ مرات ما ينطي معادلة المستقيم وانما ينطي ميل المماس جاهز كرقم فشنو نسوي.
نجد ميل المماس ونعوض x فيه ثم نجعله يساوي الميل المعطى بالسؤال
- ☒ كل دالة تمس محور الصادات فان نقطة التماس (0.y) وعكسها اذا تمس محور السينات.
- ☒ كل نقطة نهاية تمس-تنتمي لمحور السينات او الصادات فان قيمة y=0 وx=0 بالترتيب.



تمارين–وزاري: اذا كان $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f . g متماسان عند نقطة الانقلاب $(1,-11)$ فجد قيمة $a . b. c \in R$.

الحل :-

(1,-11) نقطة انقلاب تنتمي للدالة تحقق معادلتها..

$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$

$a + b + c = -11 - -1$ ندور المعادلة

وبما انها نقطة انقلاب عند x=1

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$6a(1) + 2b = 0 \quad \div 2$

$3a + b = 0 \quad - - - (2)$

نجد ميل المستقيم (نشتق معادلته.).

$g'(x) = -12$

نجد ميل المماس (نشتق معادلة المنحني ونعوض بيه x مالت نقطة التماس الي هي نفسها نقطة الانقلاب لان هو يكول بالسؤال حتى يصير جاهز كلش).

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ عندx=1

$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 3a + 2b + c$

ميل المماس=ميل المستقيم عند نقطة التماس

$3a + 2b + c = -12 \quad (3)$

ومن معادلة 1 و3 .

$a + b + c = -11 \quad - - - 1$

$\mp 3a \mp 2b \mp c = \pm 12 \quad - - - (3)$

----------------------------بالطرح

$-2a - b = 1 \quad - -4$

$3a + b = 0 \quad - - - (2)$

$a = 1$

نعوض a,bفي معادلة 2.

$3(1) + b = 0 \qquad b = -3$

نعوض في معادلة 1.

$1 - 3 + c = -11$

$c = -11 + 2 = -9$

٢٠٠٤-د٢: -حد معادلة المنحني اذا كان $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$ وكان لـ f نقطة الانقلاب $(-1,4)$ وكان ميل المماس عندها يساوي (١)

(-1,4) نقطة انقلاب تنتمي للدالة تحقق معادلته.

$$4 = a(-1)^3 - b(-1)^2 + c(-1)$$
$$-a - b - c = 4 \quad --(1)$$

نقطة انقلاب عند x=-1

اذن $f''(-1) = 0$
$$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax - 2b$$
$$6a(-1) - 2b = 0 \quad \div 2$$
$$-3a - b = 0 \quad ---(2)$$

ميل المماس =1 عند نقطة الانقلاب.

$$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$$
$$3a(-1)^2 - 2b(-1) + c = 1$$
$$3a + 2b + c = 1 \quad ----3$$

ومن معادلة ١ ومعادلة 3.

$$3a + 2b + c = 1 \quad ----3$$
$$-a - b - c = 4 \quad ----1$$

$$2a + b = 5 \quad ---4$$
$$-3a - b = 0 \quad ---(2)$$

$$-a = 5 \quad \times -1 \rightarrow \quad a = -5$$

نعوض في معادلة ٢.

$$-3(-5) - b = 0$$
$$b = +15$$

هسه نعوض في 1.

$$-(-5) - 15 - c = 4$$
$$c = 5 - 15 - 4 = -14$$

مطلوب معادلة المنحني. اكتب المعادلة بس اعوض بيها قيم a,b,c

$$f(x) = -5x^3 - 15x^2 - 14x$$

MOB:07730553030-07705795052 Telegram: @Amjed2017 facebook: amjad.salman.52

اثرائي: – اذا كان المنحني $f(x) = ax^2 - bx + 1$ يمس المستقيم y +cx=2 عند (1.1) و a,b,c الحقيقية.

(1,1) نقطة تماس تنتمي للدالة تحقق معادلته.

$1 = a(1)^2 - b(1) + 1$
$a - b = 0 \quad --(1)$

(1,1) نقطة تماس تنتمي للمستقيم تحقق معادلته.

(1)+c(1)=2 c=2-1=1 c=1

معادلة المستقيم هي y+x=2
نجد ميل المستقيم

Y'+1=0 y'=-1

نجد ميل المماس

$f'(x) = 2ax - b$

عند x=1

$f'^{(1)} = 2a(1) - b = 2a - b$

ميل المستقيم=ميل المماس في نقطة التماس

$2a - b = -1 \qquad (2)$
$\mp a \pm b = 0 \qquad (1)$
بالطرح------------------
$a = -1$

عوض في معادلة1

$-1 - b = 0 \qquad b = -1$

اثرائي: – اذا كان المنحني $f: R/\{1\} \to R \quad \to \quad f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ مماسه عند (3,-10) يوازي محور السينات فجد A,B الحقيقية.

نقطة التماس (3,-10) تحقق معادلة الدالة.

$-10 = a(3) + \frac{b}{3-1} \qquad -10 = 3a + \frac{b}{2} \quad \times 2 \qquad -20 = 6a + b \quad ---1$

ملحوظة جديدة: - اذا كلك (منحني، مماس، مستقيم، دالة) يوازي محور السينات يقصد ان ميله (مشتقته) يساوي صفر في تلك النقطة. ميل المماس $f'(x) = 0$ ميل المماس =0 عند نقطة التماس.

$f'(x) = a - \frac{-b}{(x-1)^2} \qquad 0 = a + \frac{b}{4} \quad \times 4$
$4a + b = 0 \quad -2$

ومن معادلة 1 و2.

$6a + b = -20 \quad ---1$
$\mp 4a \mp b = 0 \quad ---(2)$
بالطرح-------------------------
$2a = -20 \qquad a = -10$

نعوض في معادلة ٢

$4(-10) + b = 0 \qquad b = 40$

الحالة الثالثة



اذا طلب معادلة المماس شنسوي؟

- لازم يحدد نقطة التماس او يحدد مكانها مثلا عند نقطة النهاية او الانقلاب فنجد نقطة الانقلاب ونحولها الى تماس.
- نجد ميل المماس =مشتقة الدالة ونعوض قيمة x من نقطة التماس والناتج =m
- نعوض نقطة التماس والميل بمعادلة المماس ونصفرها

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

اذا اعطى رقم وكال (يمثل-يساوي- قيمة) نهاية او انقلاب فان الرقم يمثل y من النهاية مثال.

6 تمثل نهاية عظمى محلية، نهاية صغرى قيمتها 8، للدالة نقطة انقلاب تساوي 3. في كل هاي العبارات الرقم المعطى يمثل قيمة y. ثم نجد x: -

- نجد $f'(x)$ ونجعلها = صفر.
- نحلها ونجد قيمة x ونختبرها على خط الاعداد.
- ثم نعوض (x,y) بالدالة ونجد المجهول.

٢٠١٥د٢:-اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 - 3x^2 + c$ نهاية عظمى تساوي 8 ، ونقطة انقلاب عند x=1 فجد قيم a,c الحقيقيتين.

الحل: - خل نبدي من معلومة نقطة الانقلاب. لان من اشتق راح تبقى بس a واكدر اطلع قيمتها.

بما ان المنحني يمتلك نقطة انقلاب عند x=1 اذن $f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$ $\quad f''(x) = 6ax + 6$ $\quad 6a(1) + 6 = 0$

$6a = -6$ $\quad a = -1$

اذن الدالة $f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

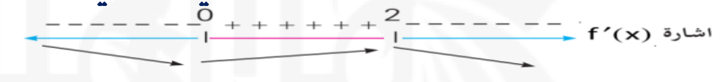
النهاية العظمى $(x.8)$ نجعل $f'(x) = 0$ ونجد x

$f'(x) = -3x + 3x^2$ $\quad -3x^2 + 6x = 0 \quad \div -3$

$x^2 - 2x = 0$ $\quad x(x - 2) = 0$

اما $x = 0$ او $x = 2$

نختبرها على خط الاعداد لنتأكد من قيمة اي x تعطي نهاية عظمى .



اذن النهاية العظمى (2,8) وهي تنتمي للدالة وتحققها معادلتها

$8 = -(2)^3 + 3(2)^2 + c$

$8 = -8 + 12 + c$

$c = 8 - 4 = 4$

٢٠١٢د٢ :-اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى للدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة $c \in R$، ثم جد معادلة المماس للمنحنى في نقطة انقلابه.

النهاية الصغرى هي $(x.6)$ نجعل $f'(x) = 0$ ونجد قيمة x.

$f'(x) = 6x - 3x^2$ $\qquad 6x - 3x^2 = 0 \quad \div 3$ $\qquad x(2 - x) = 0$

اما $x = 0$ او $x = 2$

نختبرها على خط الاعداد لنتأكد من قيمة اي x تعطي نهاية صغرى.

$\therefore x = 0$

أشارة $f'(x)$: $x<0$ (−) ، $x=0$ ، (+) ، $x=2$ ، $x>2$ (−)

نقطة النهاية الصغرى لمنحني الدالة(0,6)

اذن نقطة النهاية الصغرى (حسب الاختبار)(0.6) وهي تنتمي للدالة وتحقق معادلتها.

$6 = 3(0)^2 - 0^3 + c$ $\qquad c = 6$

الان نجد معادلة المماس للمنحني نجد نقطة التماس=نقطة الانقلاب

$f'(x) = 6x - 3x^2$ $\qquad f''(x) = 6 - 6x$ $\qquad 6 - 6x = 0$

$6x = 6$ $\qquad x = 1$

(نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة)

$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 8$

نقطة انقلاب هي (1.8) وهي نفسها نقطة تماس

نجد ميل المماس نعوض قيمة x=1 مالت التماس فيها

$f'(x) = 6x - 3x^2 = 6.(1) - 3(1)^2 = 3 = m$

معادلة المماس هي :-(1.8) والميل =m=3

$(y - y1) = m(x - x1)$

$(y - 8) = 3(x - 1)$ **نصفرها لازم**

$y - 8 = 3x - 3$ $\qquad y - 8 - 3x + 3 = 0$ $\qquad y - 3x - 5 = 0$

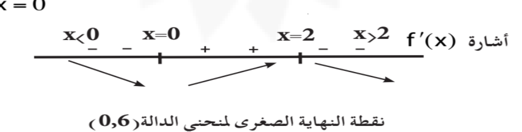
اثرائي :-اذا كانت للدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ نهاية صغرى تنتمي لمحور السينات فجد قيمة $c \in R$

النهاية تنتمي لمحور السينات اذن النهاية الصغرى هي (x,0) نجد قيمة x

$f'(x) = 6x - 3x^2$ $\qquad 6x - 3x^2 = 0 \quad \div 3$ $\qquad x(2 - x) = 0$

اما $x = 0$ او $x = 2$

نختبرها على خط الاعداد لنتأكد من قيمة اي x تعطي نهاية صغرى.



اذن نقطة النهاية الصغرى (حسب الاختبار)

(0.0) وهي تنتمي للدالة وتحقق معادلتها.

$0 = 3(0)^2 - 0^3 + c$ $\qquad c = 0$

الحالة الرابعة

- ☒ إذا اعطى نقطة يمر-يقطعها-تنتمي-تقع على المنحني هاي نستفاد منها مرة واحدة فقط نعوضها بالدالة الاصلية.
- ☒ إذا طلب اثبت ان دالة لا تمتلك نهاية عظمى. نشتق ونجد النهاية ونشوف نوعها.
- ☒ إذا اعطى قيم a بشكل خيارات بحيث يجعل
  - ❖ الدالة محدبة او مقعرة لازم نطلع المشتقة الثانية ونختار الرقم الي يخلي f"(x)=موجب او سالب.
  - ❖ تمتلك نهاية عظمى او صغرى نستخدم طريقة اختبار المشتقة الثانية ونختار عكس الإشارة.
  - ❖ متزايدة او متناقصة نجد f' فقط ونختار إشارة الرقم الي يخلي f'=+ , - حسب المطلوب.

٢د١٩٩٩: – اذا كانت الدالة $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ تمر ب $(-2.-2)$ ولها نقطة انقلاب عند x=1 فجد قيمة $b.c \in R$ ثم جد النهاية العظمى لها.

نقطة (-2,-2) يمر بها منحني الدالة اذن هي تنتمي للدالة، تحقق معادلتها

$$-2 = (-2)^3 - b(-2)^2 + c(-2)$$

$$-2 = -8 - 4b - 2c \qquad \div -2$$

$$1 = 4 + 2b + c$$

$$2b + c = 1 - 4 \qquad 2b + c = -3 \qquad ---(1)$$

وبما ان المنحني عنده نقطة انقلاب عند x=1 اذن

$$f''(1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2bx + c \qquad f''(x) = 6x - 2b$$

$$6(1) - 2b = 0$$

$$2b = 6 \qquad b = 3$$

نعوض في معادلة 1

$$2(3) + c = -3 \qquad 6 + c = -3 \qquad c = -3 - 6 = -9$$

النهاية العظمى واجب.

تمارين: – الدالة $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث $a=\{-4.8\}$ فجد قيمة a التي تجعل الدالة

١–محدبة ٢– مقعرة.

نجد المشتقة الثانية.

$$f'(x) = 2ax - 6 \qquad f''(x) = 2a$$

أ-لكي تكون الدالة محدبة يجب ان تكون اشارة المشتقة الثانية سالب.

$$f''(x) = - \qquad \therefore a = -4$$

ب-لكي تكون الدالة مقعرة يجب ان تكون الاشارة موجب

$$f''(x) = + \qquad \therefore a = 8$$

٢٠٠٤د١: – الدالة $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث $a=\{-1.0.1.3\}$ فجد قيمة a التي تجعل الدالة تمتلك نهاية عظمى .

(قيمة a لو -1 لو 0 لو1 لو 3 وحسب الملاحظات الي فوك)

$f'(x) = 4ax$

[حتى اعرف قيمة a لازم عندي قيمة x ولا نكدر نختبر على خط الاعداد لان مجهولين ما نكدر نطلع قيمة { نستخدم طريقة فحص المشتقة الثانية.

$f''(x) = 4a$

لكي تكون للدالة نهاية عظمى . يجب ان تكون إشارة

$.f''(x) = -$ $\therefore a = -1$

٢٠١٨–د١ : – اثبت ان الدالة $x \neq 0$ $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

$f(x) = x^2 - ax^{-1}$

$f'(x) = 2x + ax^{-2} = 2x + \frac{a}{x^2}$ المشتقة $f'(x) = 0$

$2x + \frac{a}{x^2} = 0$ $\times\ x^2$

$\rightarrow\ 2x^3 + a = 0$ $\rightarrow\ x^3 = -\frac{a}{2}$ $\sqrt[3]{\ }$ للطرفين $x = \sqrt[3]{-\frac{a}{2}}$

(مادام اكو مجهول a ما كدر اختبر نوعها على خط الاعداد لان ما أكدر اخذ أكبر وأصغر من x. نختبرها بالمشتقة الثانية. هسه نطلع المشتقة الثانية)

$f''(x) = 2 - 2ax^{-3} = 2 - \frac{2a}{x^3}$

(هسه نعوض قيمة x مالت المشتقة الاولى بالمشتقة الثانية)

$$f''\left(\sqrt[3]{-\frac{a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\left(\sqrt[3]{-\frac{a}{2}}\right)^3} = 2 - \frac{2a}{-\frac{a}{2}} = 2 + 2 \times 2 = 6$$

بما ان الاشارة موجب. توجد نهاية صغرى فقط. اذن لا توجد نهاية عظمى.

اثرائي: اذا كانت (1.2) نقطة حرجة للدالة $ax^2 + bxy + by^2 = 5$ فجد قيم $a, b \in R$

(1.2) تنتمي للدالة تحقق معادلتها

$a(1)^2 + b(1)(2) + b(2)^2 = 5$ $a + 2b + 4b = 5$ $a + 6b = 5 \quad (1)$

بما ان الدالة لها نقطة حرجة عند x=1 اذن

$f'(1) = y' = 0$

نشتق ضمنيا

$2ax + bxy' + by + 2byy' = 0$

نعوض $y = 2$ $x = 1$ $y' = 0$

$2a(1) + b(1)(0) + b(2) + 2b(2)(0) = 0$ $2a + 2b = 0$ $\div 2$

$a + b = 0 \quad (2)$

ومن معادلة ١ و ٢.

$a + 6b = 5 \qquad (1)$

$\mp a \mp b = 0 \qquad (2)$

بالطرح---------

$5b = 5 \qquad b = 1 \quad in(2) \qquad a + 1 = 0 \qquad a = -1$

المرتبة الثانية

الألماني العظيم والفتى الخارق و الأستاذ النرجسي وأبو العلماء

كارل فريدريش غاوس : Carl Friedrich Gaussعالم رياضيات و فيزياء الماني ، ولد في عام ١٧٠٧ وتوفي في ١٧٨٣ ، لقب بأمير الرياضيات ، كانت له مساهمات عديدة في مختلف المجالات مثل الجبر ، نظرية الأعداد ، التحليل ، الإحصاءات ، الجيوفيزياء ، والهندسة التفاضلية ، والبصريات ، والكهرباء الساكنة ، وأيضا في علم الفلك ، واعتبر من أكثر العلماء تأثيرا بتاريخ الرياضيات ، هذا الفتى المعجزة إن صح القول يعرف بـ أمير الرياضيات .صنع أولى اكتشافاته الهامة حين كان لا يزال مراهقا ! . و كتب أعظم إبداعاته و هو بحث في الأعداد باسم "استفسارات حسابية " حين كان في ال٢١ من عمره فقط !.

تخرج من الجامعة في عام ١٩٧٨ و عمره ٢٢ عاما و بدأ عدة إسهامات هامة في مختلف مجالات الرياضيات و على وجه الخصوص نظرية الأعداد و خاصة الأعداد الأولية. كما قام بإثبات النظرية الأساسية في الجبر و أوجد ثابت الجاذبية في الفيزياء. و كل ذلك قبل أن يبلغ ال ٢٤ من العمر. استمر غاوس في إبداعه حتى موته في عمر ال ٧٧. و قد قام بعمل جبار في مختلف المجالات لاسيما الرياضيات لا يزال يذك بسببه إلى الآن.

وتم الاعتراف بغاوس بإعتباره موهبة رائعة ، على الرغم من أنه ناتج عن اثنين من المنشورات الرئيسية في عام ١٨٠١ ، وكانت صحيفته قبل كل شيء أول كتاب منهجي في نظرية الأعداد الجبري ، . Disquisitiones Arithmeticaeوبدأ هذا الكتاب مع الحساب الأول من حساب الوحدات ، حيث يعطي وصفا دقيقا لحلول الحدود من الدرجة الثانية في متغيرين من الأعداد الصحيحة ، وتنتهي النظرية الى العوامل المذكورة أعلاه ، وهذا الخيار من المواضيع والتعميمات الطبيعية لتعيين جدول الأعمال في نظرية الأعداد لجزء كبير من القرن ال١٩ ، ولأهتمام غاوس المستمرة بهذا الموضوع دفعته للكثير من البحث ، خصوصا في الجامعات الألمانية .وكان المنشور الثاني هو إعادة اكتشافه عن الكويكب سيريس ، وكان الأكتشاف الأصلي ، من قبل الفلكي الإيطالي جوزيبي بيازا في عام ١٨٠٠ ، والذي قد أثار ضجة كبيرة ، ولكنها اختفت وراء الشمس قبل اتخاذ الملاحظات الكافية لحساب مداره بدقة كافية ليعرف أين سوف يعود الى الظهور ، ونافسه العديد من علماء الفلك لشرف العثور عليه مرة أخرى ، ولكن فاز غاوس .

غاوس لسنوات عديدة في مجال الفلك ونشر عمل كبير على حساب المدارات، وكان الجانب العددي من هذا العمل أقل إرهاقا بكثير بالنسبة له من معظم الناس.

قام غاوس للتحدي المتمثل في مسح الأراضي .وقد اخترع جاوس من حجر الدم " أداة تعكس أشعة الشمس في شعاع تركيزي والتي يمكن ملاحظتها من على بعد عدة أميال " ، مما أدى إلى تحسن دقة الملاحظات .

وكان آخر اكتشاف له في وسيلة صياغة مفهوم انحناء السطوح

عمل غاوس على نظرية الأعداد ، واستخدامها لبناء الخرائط ، والعديد من المواضيع الأخرى .

وفي عام ١٨٣٠م ، أصبح مهتماً بالمغناطيسية الأرضية وشارك في الاستطلاع الأول في جميع أنحاء العالم في المجال المغناطيسي للأرض " لقياس ذلك ، وقال انه اخترع المغناطيسية " ، مع نظيره الزميل غوتنغن ، والفيزيائي ويلهلم ويبر ، وقال انه قدم أول تلغراف كهربائي ، ولكن ذلك ، لفت نظره للعواقب الرياضية الهامة من هذا العمل إلي ما يسمى اليوم بالنظرية المحتملة ، الذي هو فرعاً هاماً في الفيزياء الرياضية الناشئة عن دراسة الكهرومغناطيسية والجاذبية .

حصل على جائزة الأكاديمية الدنماركية للعلوم في عام ١٨٢٣ ، وكان لجاوس أيضا رؤى غير منشورة أخرى عن طبيعة المهام المعقدة والتكامل ،

نشر عن وظائف الشكل البيضوي ،وبحلول ذلك الوقت كان يعرف كيفية استخدام المعادلة التفاضلية لإنتاج نظرية عامة جدا من وظائف الشكل البيضوي .

خرج من بين طلابه أعظم علماء الرياضيات ومنهم ديكدند وريمان

مع كل هذه المعجزة لكنه ليس الأعظم في الرياضيات

الرسم البياني للدالة

☒ نجد اوسع مجال للدالة. حيث كثيرة الحدود مجالها R. والكسرية نجعل المقام=0 ونجد قيمة X ويصبح مجالها R-{X}.

☒ نجد نقاط التقاطع:-
- مع السينات نجعل Y=0 ونجد قيمة X فتصير النقطة (X,0).
- ب-مع الصادات نجعل X=0 ونجد قيمة Y فتصير النقطة (0,Y) .

☒ نجد المحاذيات فقط للدوال الكسرية:-
- ❖ المحاذي العمودي: - مباشرة نجعل المقام= 0 ونجد قيمة X لتمثل خط مستقيم عمودي ممنوع ع الدالة تقطعه لكن تحاذيه.
- ❖ المحاذي الافقي: - لازم نجعل الدالة بدلالة Y حيث نطبق وسطين في طرفين ثم نقل ثم عامل مشترك ثم بعيد ع قريب ثم نجعل المقام= 0 ثم نجد قيمة Y لتمثل مستقيم افقي يسمى محاذي افقي لا تقطعه الدالة بل تحاذيه .

☒ نجد التناظر نعوض مكان كل (x) بالدالة ب(-x) والناتج هو $f(-x)$ ثم نشوف الناتج
- ✓ اذا كان يشبه الدالة الاصلية فان الدالة متناظرة محور الصادات واذا يختلف فانه لا يوجد تناظر مع الصادات
- ✓ نضرب الدالة بسالب واذا كان الناتج يشبه $f(-x)$ فانها متناظرة مع نقطة الأصل والعكس صحيح.

يوجد تناظر مع الصادات $f(-x) = f(x)$

يوجد تناظر مع نقطة الاصل $f(-x) = -f(x)$

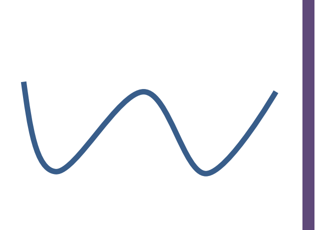
☒ نجد النهايات والتزايد والتناقص.

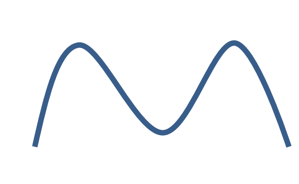
☒ نجد التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب.

☒ تجمع النقاط مالتك بجدول لازم عندك 5 نقاط او اكثر واذا اقل افرض قيم X اضافية من يمك وعوض بالدالة وطلع قيم Y.

☒ رتب قيم X تصاعديا ووصل بيناتهم بس انتبه لنقاط النهايات العظمى (تصعد وتنزل) والصغرى (تنزل ثم تصعد) والانقلاب فقط تكون بيه الدالة متقوسة بطريقة تحدب او تقعر.

رسومات بعض الدوال		
	اما	او
رسم أي دالة من الدرجة الثانية $y = ax^2 + b$ $y = ax^2 + bx + c$	∪	∩
رسم أي دالة من الدرجة الثالثة او الخامسة او السابعة $y = ax^3 + b.ax^5 + b.ax^7 + b$		
رسم أي معادلة من الدرجة الثالثة لكن تحتوي x أخرى يعني $y = ax^3 + bx + c$ $y = ax^3bx^2 + c$		





رسم دالة بصورة

$$y = ax^4 - bx^2 + c$$
$$y = bx^2 - ax^4 + c$$

بالنسبة للتناظر: - هو انعكاس الرسم حول محور الصادات او نقطة الأصل. بالنسبة لمحور السينات لا يوجد ضمن منهج السادس

كيفية معرفة الدالة متناظرة مباشرة

- إذا كانت الأسس جميعها زوجية فان الدالة متناظرة مع محور الصادات.

  $y = ax^4 - bx^2 + c$ $\qquad$ $y = ax^4 - bx^2$
- إذا كانت الأسس فردية فان الدالة متناظرة مع نقطة الأصل.مثال

  $y = ax^3 - bx$
- إذا كانت الأسس مختلطة (زوجية -فردية) فان الدالة غير متناظرة مع الصادات ولا نقطة الأصل.مثال

  $y = ax^4 - bx^3 + cx + 4$
- إذا كانت الأسس فردية وتحتوي حد مطلق لا يوجد تناظر ابدا. لكن بحالة الزوجية سواء كان هنالك حد مطلق او لا فأنها متناظرة. مثال

$$y = ax^3 - bx + c$$

بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة

$$y = f(x) = x^5$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود.

٢-نجد نقاط التقاطع:-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 0^5 = 0$ $\qquad$ نقطة التقاطع هي (0.0)

ب-مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = x^5$ $\qquad$ $\sqrt[5]{}$ للطرفين

$x = 0$ $\qquad$ نقطة التقاطع هي (0.0)

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست نسبية.

٤-التناظر:-(نعوض مكان كل x ب-x)

$f(-x) = (-x)^5 = -x^5$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الدالة من نضربها بسالب

$f(-x) = -f(x)$ الدالة متناظرة مع نقطة الاصل

$f(-x) \neq f(x)$ الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

٥-نجد النهايات :-

$f'(x) = 5x^4$ $\qquad$ المشتقة

$f'(x) = 0$ $\qquad$ نصفرها

$5x^4 = 0$ $\quad \div 5$ $\quad x^4 = 0$ $\quad x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$f(0) = (0)^5 = 0$

صارت عندي نقطة هي (0.0) ونختبرها .

اشارة $f'(x)$: $+ + + + + +$ | 0 | $+ + + + + +$

f متزايدة في كل من $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

$(0,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية.

٦-نجد نقاط الانقلاب: -

المشتقة $\qquad$ $f'(x) = 20x^3$

نصفرها $\qquad$ $f'(x) = 0$

$20x^3 = 0$ $\quad \div 20$

$x^3 = 0$ $\qquad$ $x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y

$f(0) = (0)^5 = 0$

صارت عندي نقطة هي

(0.0)

ونختبرها بالمشتقة الثانية .

اشارة $f''(x)$: $- - - - - -$ | 0 | $+ + + + + +$

تحدب $\qquad$ تقعر

f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

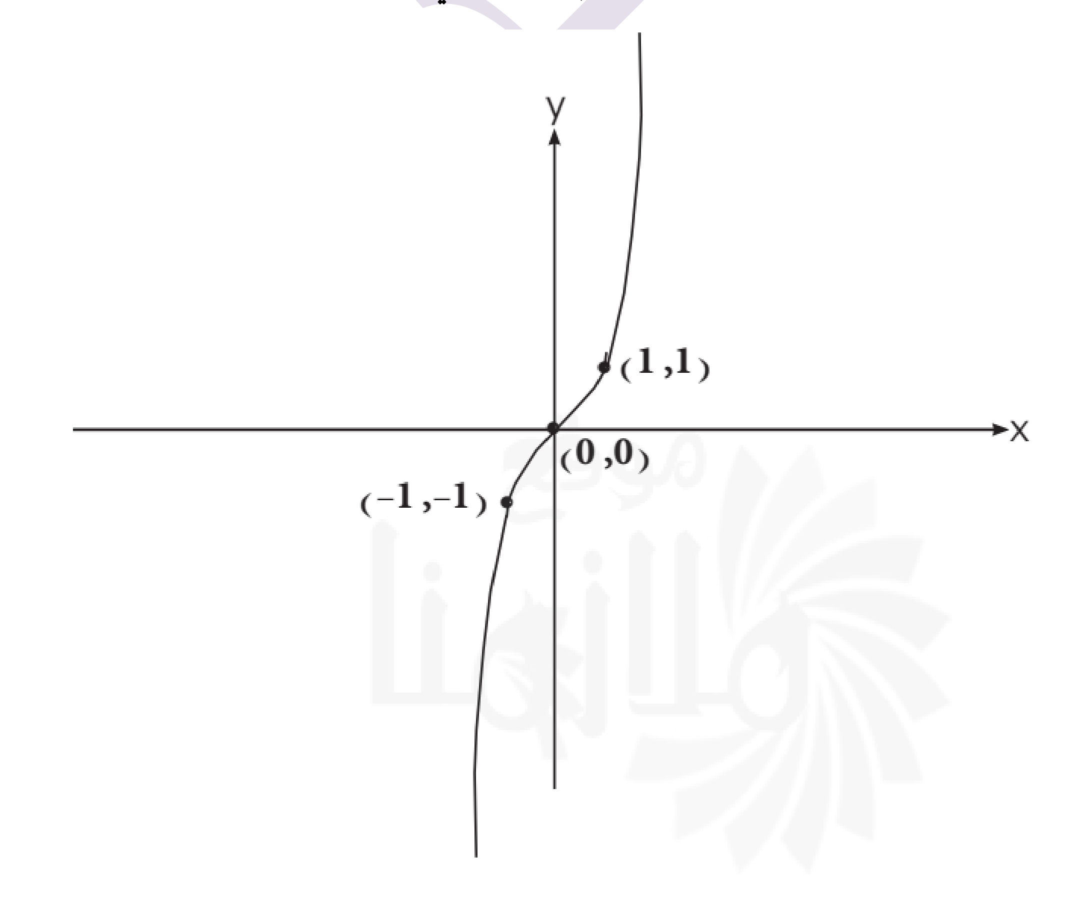
∴ $(0,0)$ نقطة الانقلاب

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها. مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار

$(x.y)$	Y	x	نوع النقطة	النقاط الاضافية تفرض قيمة لـx بس كون معقولة وتعوضها بالدالة الاصلية وتطلع قيمة الناتج مالتها وتخليه مكان y
(0.0)	0	0	تقاطع +انقلاب	
(1.1)	1	1	إضافية	
(2.32)	32	2	إضافية	
$(-2.-32)$	-1	-1	إضافية	
$(-1.-32)$	-32	-2	إضافية	

هسه شلون نرسم.

- ✓ حدد موقع النقاط. وتبدي تخلي القلم مالت على النقطة الي بيها اقل قيمة x وثم الاكبر منها وهكذا لما تخلصهن.
- ✓ من تروح على نقطة عظمى تصعد للنقطة ثم تنزل بشكل قوس متحدب. وإذا صادفت نقطة انقلاب تغير التقوس بشكل متقعر.
- ✓ من تروح على نقطة صغرى تنزل ثم تصعد بحيث بشكل منحني مقوس بالتقعر.
- ✓ او من خلال الرسومات المعطاة نكدر نرسم بشكل نهائي ودقيق.



بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لأنها كثيرة الحدود.
٢-نجد نقاط التقاطع:-
أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$

نقطة التقاطع هي (0.4)

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = x^3 - 3x^2 + 4$

اي معادلة من 3 حدود ودرجة ثالثة انتبه زين شنو جاي اكول. هاي ما نكدر نحلها بالسادس. توجد نقاط بس ما نكدر نطلعها.
٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية.
٤-التناظر:- نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$

هسه نقارن

$f(-x) \neq f(x)$ الدالة غير متناظرة مع محور الصادات
$f(-x) \neq -f(x)$ غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات:-

المشتقة $f'(x) = 3x^2 - 6x$

نصفرها $0 =$

$3x^2 - 6x = 0 \quad \div 3$

$x^2 - 2x = 0 \qquad x(x-2) = 0$

اما $x = 0$ او $x = 2$

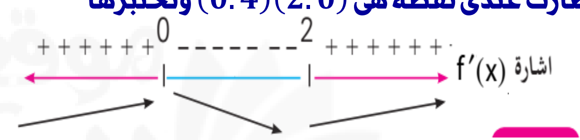
نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم y=f(x) حتى تصير عندي نقطة كاملة.

$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \qquad (0.4)$

$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4$

$= 8 - 12 + 4 = 0 \qquad (2.0)$

صارت عندي نقطة هي $(0.4)(2.0)$ ونختبرها



(0.4) هي نقطة نهاية عظمى
(2.0) هي نقطة نهاية صغرى

f متزايدة في كل من $\{x : x > 2\}$, $\{x : x < 0\}$

f متناقصة في الفترة $(0, 2)$

٦-نجد نقاط الانقلاب:-

المشتقة الثانية $f'(x) = 6x - 6$

نصفرها $f''(x) = 0$

$6x - 6 = 0 \qquad 6x = 6$

$x = 1$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم y=f(x) حتى تصير عندي نقطة كاملة.

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

صارت عندي نقطة هي (1.2) ونختبرها.

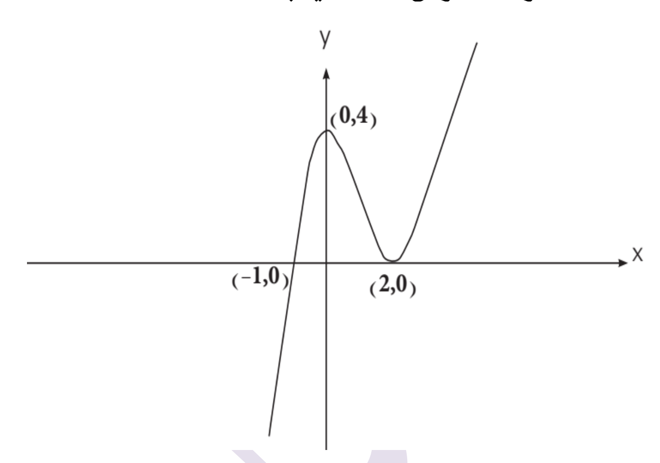


f مقعرة في $\{x : x > 1\}$
f محدبة في $\{x : x < 1\}$
$\therefore (1, 2)$ نقطة انقلاب.

٧-نجمع كل النقاط الي حصلناها. مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار.

نوع النقطة	X	Y	$(x.y)$
تقاطع +عظمى	0	4	(0.0)
تقاطع +صغرى	2	0	(2.0)
انقلاب	1	2	(1.2)
إضافية	-1	0	(-1.0)
إضافية	3	4	(3.4)

هسه نبدأ باقل قيمة x=-1 نصعد للعظمى بشكل محدب الي هي x=0 وننزل محدبين ثم x=1 هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير التقوس نسوي مقعر ثم x=2 هاي صغرى منها ونصعد الى النقطة x=3 ونستمر الى ما لانهاية بعد.



بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة

$$y = f(x) = 6x - x^3$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لأنها كثيرة الحدود.
٢-نجد نقاط التقاطع: -
أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0$

(0.0) نقطة التقاطع هي

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = 6x - x^3$ $\qquad x(6 - x^2) = 0$

اما $x = 0$ او $6 - x^2 = 0$

$x^2 = 6$ $\qquad x = \mp\sqrt{6}$

نقطة التقاطع هي (0.0) $(\sqrt{6}.0)$ $(-\sqrt{6}.0)$

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية.

٤-التناظر: - نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3$

نقارن

$f(-x) \neq f(x)$

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) = -f(x)$ الدالة متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات: -

المشتقة $f'(x) = 6 - 3x^2$

نصفرها $f'(x) = 0$

$6 - 3x^2 = 0$ $\qquad \div -3$

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 6$ $\qquad x = \mp\sqrt{2}$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم y=f(x) حتى تصير عندي نقطة كاملة.

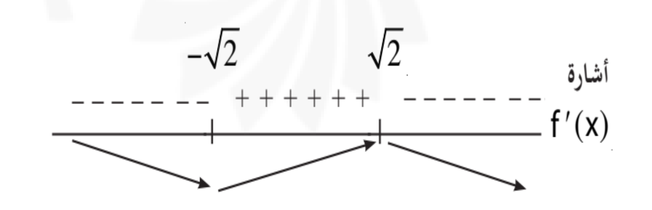
$f(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3$

$= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ $\qquad (\sqrt{2}.4\sqrt{2})$

$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3$

$= -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$(-\sqrt{2}.-4\sqrt{2})$



$(\sqrt{2}.4\sqrt{2})$ هي نقطة نهاية عظمى

$(-\sqrt{2}.-4\sqrt{2})$ هي نقطة نهاية صغرى

f متناقصة في $\{x : x < -\sqrt{2}\}\{x : x > \sqrt{2}\}$

f متزايدة في $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

-نجد نقاط الانقلاب:-

المشتقة الثانية $f''(x) = -6x$

نصفرها $f''(x) = 0$

$-6x = 0$ $\qquad \div -6$

$x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم y=f(x) حتى تصير عندي نقطة كاملة.

$f(0) = 6(0) - (0)^3 = 0$

صارت عندي نقطة هي (0.0) ونختبرها.

اشارة f'':   + + + + + + (مقعرة)   0   - - - - - - - (محدبة)

مقعرة $\{x : x < 0\}$

محدبة $\{x : x > 0\}$

$\therefore$ نقطة الانقلاب $(0,0)$

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها.

نوع النقطة	X	Y	$(x.y)$
تقاطع +انقلاب	0	0	(0.0)
تقاطع	$\sqrt{6}$	0	$(\sqrt{6}.0)$
تقاطع	$-\sqrt{6}$	0	$(-\sqrt{6}.0)$
عظمى	$\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}.4\sqrt{2})$
صغرى	$-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}.-4\sqrt{2})$

نبدأ باقل قيمة $x = -\sqrt{6} \cong -2.3$ وننزل الى الصغرى بشكل متقعر الي $x = -\sqrt{2} \cong -1.4$ نصعد متقعرين الى ثم x=0 هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير التقوس نسوي محدب ثم $x = \sqrt{2} \cong 1.4$ هاي عظمى منها وننزل الى النقطة $x = \sqrt{6} \cong 2.3$ ونستمر.

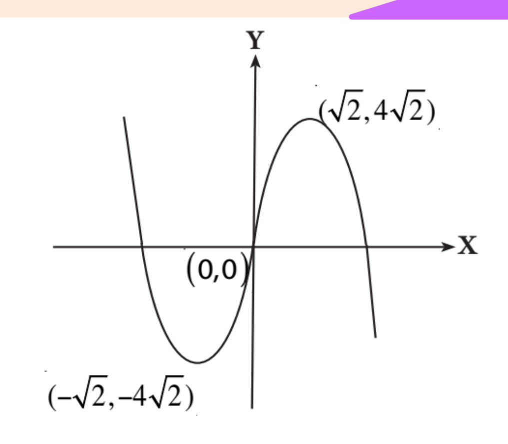
فد ملاحظة جثير مهمة
شلون نطلع الجذور لارقام مالها جذور
نستخدم قاعدة التقريب التالية

$$\sqrt{\text{عدد}} = \frac{\text{عدد قريب له جذر} + \text{عدد}}{2\sqrt{\text{عدد قريب له جذر}}}$$

$\sqrt{2} = \frac{2+1}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2} = 1.5$

$\sqrt{6} = \frac{6+4}{2\sqrt{4}} = \frac{10}{4} = 2.5$

$4\sqrt{2} = 4 \times 1.5 = 6$



بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة

$$y = f(x) = 10 - 3x - x^2$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود .
٢-نجد نقاط التقاطع :-
أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 10 - 3(0) - (0)^2 = 10$

نقطة التقاطع هي (10.0)

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = 10 - 3x - x^2 \qquad \times -1$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \qquad (x+5)(x-2) = 0$

اما $x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$

او $x - 2 = 0 \qquad x = 2$

نقطة التقاطع هي $(2.0) \quad (-5.0)$

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية.
٤-التناظر: -نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 = 10 + 3x - x^2$

هسه نقارن هاي ام اللون الاصفر مع الدالة ومع الي ضربناها سالب .

$f(-x) \neq f(x)$

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) \neq -f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات :-

المشتقة $f'(x) = -3 - 2x$

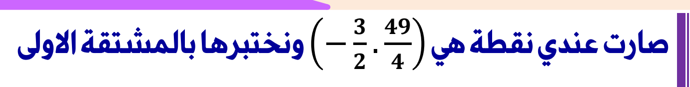
نصفرها $f'(x) = 0$

$-3 - 2x = 0 \qquad 2x = -3$

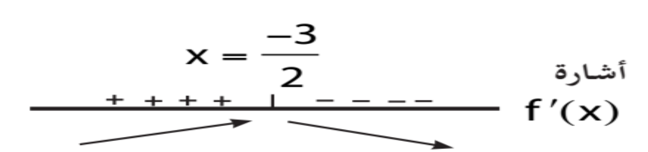
$x = -\frac{3}{2}$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 10 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40 + 18 - 9}{4}$$
$$= \frac{49}{2} \qquad \left(-\frac{3}{2}.\frac{49}{4}\right)$$



صارت عندي نقطة هي $\left(-\frac{3}{2}.\frac{49}{4}\right)$ ونختبرها بالمشتقة الاولى



$\left(-\frac{3}{2}.\frac{49}{4}\right)$ هي نقطة نهاية عظمى

ومتزايدة في $\left\{x : x < \frac{-3}{2}\right\}$, متناقصة في $\left\{x : x > \frac{-3}{2}\right\}$

٦-نجد نقاط الانقلاب:-

المشتقة الثانية $f''(x) = -2$

نصفرها $f''(x) = 0$

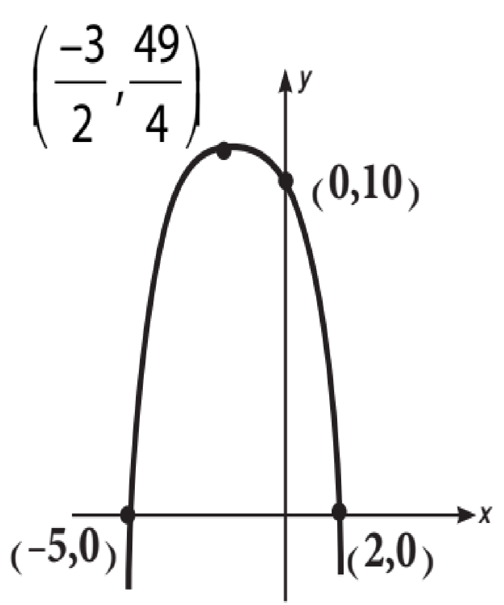
$-2 \neq 0$

عبارة خاطئة. لا توجد نقاط انقلاب . والدالة محدبة لان اشارة المشتقة الثانية سالب . ولا توجد فجوة .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار.

نوع النقطة	X	Y	$(x.y)$
تقاطع+انقلاب	0	10	(0.10)
تقاطع	2	0	(2.0)
تقاطع	−5	0	(-5.0)
عظمى	$-\frac{3}{2}$	$\frac{49}{4}$	$\left(-\frac{3}{2}.\frac{49}{4}\right)$
إضافية	1	6	(1.6)

هسه نبدأ باقل قيمة $x = -5$ ونصعد الى العظمى بشكل محدب الي $x = -\frac{3}{2}$ وننزل متحدبين الى ثم x=0 ونستمر الى x=1 ثم x=2 وكل هذا الحجى بشكل محدب.



بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة

$$y = f(x) = 2x^2 - x^4$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لانها كثيرة الحدود.

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$

نقطة التقاطع هي (0.0)

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = 2x^2 - x^4$ $\quad x^2(2 - x^2) = 0$

اما $x^2 = 0$ $\quad x = 0$

او $2 - x^2 = 0$ $\quad x^2 = 2$ $\quad x = \mp\sqrt{2}$

نقطة التقاطع هي (0.0) $(\sqrt{2}.0)$ $(-\sqrt{2}.0)$

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية.

٤-التناظر: نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4$

نقارن

$f(-x) = f(x)$

الدالة متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) \neq -f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات:-

المشتقة $f'(x) = 4x - 4x^3$

نصفرها $f'(x) = 0$

$4x - 4x^3 = 0$ $\quad \div 4$

$x(1 - x^2) = 0$

اما $x = 0$

او $1 - x^2 = 0$ $\quad x^2 = 1$

$x = \mp 1$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y

$f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 = 0$ $\quad (0.0)$

$f(1) = 2(1)^2 - (1)^4 = 2 - 1 = 1$ $\quad (1.1)$

$f(-1) = 2(1-)^2 - (-1)^4 = 2 - 1 = 1$ $\quad (-1.1)$

صارت عندى نقطة هى $(-1.1)(1.1)(0.0)$ ونختبرها.

اشارة $f'(x)$: $\quad$ ++++ $\; -1 \;$ ---- $\; 0 \;$ ++++ $\; 1 \;$ ----

$(-1.1)(1.1)$ هي نقطتا نهاية عظمى

(0.0) هي نقطة نهاية صغرى

هنا عندي هواي مناطق شلون راح اكتبها باوع عليه :-

مناطق التزايد= $\{x; x < -1\}$ والفترة (0.1)

مناطق التناقص= $\{x; x > 1\}$ والفترة (-1.0)

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

المشتقة الثانية $f''(x) = 4 - 12x^2$

نصفرها $f''(x) = 0$

$4 - 12x^2 = 0$ $\quad \div 4$

$1 - 3x^2 = 0$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y حتى تصير عندي نقطة كاملة .

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{5}{3}\right)$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{5}{3}\right)$

صارت عندي نقطة هي $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} . \frac{5}{3}\right)$ ونختبرها

اشارة $f''(x)$: $\quad$ ------- $\; -\frac{1}{\sqrt{3}} \;$ +++++++ $\; \frac{1}{\sqrt{3}} \;$ -------

تحدب $\quad$ تقعر $\quad$ تحدب

$\therefore$ نقاط الإنقلاب $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$

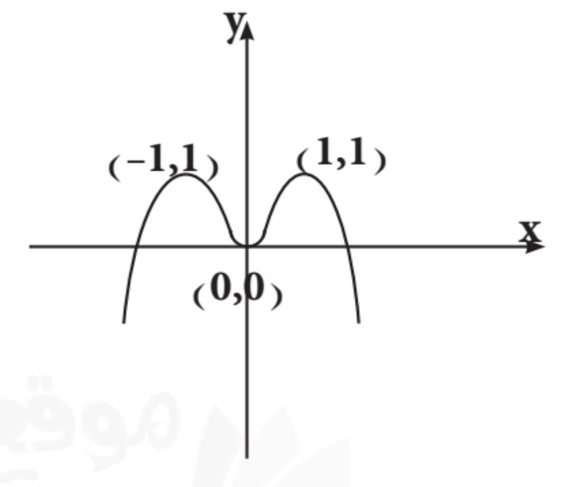
f محدبة $\left\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ $\left\{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

مقعرة في الفترة المفتوحة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها.

نوع النقطة	x	y	$(x.y)$
تقاطع +صغرى	0	0	(0.0)
تقاطع	$\sqrt{2}$	0	$(\sqrt{2}.0)$
تقاطع	$-\sqrt{2}$	0	$(-\sqrt{2}.0)$
عظمى	1	1	(1.1)
عظمى	-1	1	(-1.1)
انقلاب	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{3}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{5}{3}\right)$
انقلاب	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{5}{3}\right)$

[نبدأ باقل قيمة $x = -\sqrt{2} \cong -1.4$ ونصعد الى العظمى بشكل محدب الي $x = -1$ وننزل محدبين الى $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.6$ هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير x=0 التقوس نسوي تقعر ثم $x = 0$ هاي صغرى منها ونصعد مقعرين الى النقطة $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.6$ الي هي انقلاب يعني نتحول الى التحدب مرة ثانية ثم $x \cong 1$ الي هي عظمى منها ونزل ونستمر الى ما لانهاية بعد]



المرتبة الأولى من نصيب السويسري

ملك الرياضيات

إن كان غاوس هو الأمير فإن ليونارت هو الملك إن صح القول. ينظر إليه على أنه أعظم عالم رياضيات مشى على هذا الكوكب.

ولد ليونارد أويلر في مدينة بازل (Basel) - (سويسرا في الخامس عشر من شهر نيسان، عام ١٧٠٧ م. دراساته الأولى بدأت في مدينة بازل نفسها، حيث كان يدرس اللاهوت، اليونانية والعبرية تبعاً لرغبة أبيه في أن يتبع خطاه ويصبح قساً مثله إلا أن يوهان بيرنولي الذي كان يعتبر حينها من أعظم الرياضيين في أوروبا كان صديقا لأبيه وأقنعه بأن ابنه ليونارد ولد ليصبح رياضيّاً عظيماً.

في عام ١٧٢٣ حصل أويلر على شهادة الماجستير في الفلسفة ثم على شهادة الدكتوراه في عام ١٧٢٦.

وقد قام بإعداد أولى مقالاته في عام ١٧٢٦ وكانت مقالة قصيرة تتحدث عن المنحنيات المتزامنة في وسط مقاوم وفي عام ١٧٢٧ نشر مقالة أخرى عن المسارات التبادلية.

كان السابع عشر من شهر أيار عام ١٧٢٧ هو اليوم الذي انتقل فيه أويلر إلى مدينة سانت بطرسبرغ في روسيا ليدرس في أكاديميتها ثم ليصبح فيما بعد بروفيسور الفيزياء فيها عام ١٧٣١، بعد ذلك تم تسليمه منصب رئاسة قسم الرياضيات في السابع عشر من شهر كانون الثاني لعام ١٧٣٤.

تزوج أويلر من كاثرين جزيل ((Katharina Gsell لينجب منها ١٣ طفلاً لكن بقي ٥ منهم فقط على قيد الحياة بعد الولادة.

يدّعي أويلر أن العديد من اكتشافاته العظيمة في الرياضيات توصل إليها بينما كان يحمل طفلاً وبقية أطفاله يحومون حوله.

التكملة في صفحات لاحقة.



$$y = f(x) = (x+2)(x-1)^2$$

١-اوسع مجال للدالة هو R لأنها كثيرة الحدود .

٢-نجد نقاط التقاطع: -

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$f(0) = (0+2)(0-1)^2 = 2$

(0.2) نقطة التقاطع هي

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0 = (x+2)(x-1)^2$

$(x+2)(x-1)^2 = 0$

اما $x+2=0$ $x=-2$

او $(x-1)^2=0$ $x-1=0$ $x=1$

(-2.0) (1.0) نقطة التقاطع هي

٣-لا توجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية .

٤-التناظر: -نبسط الدالة لان هيج اقواس صعب يتعوض او ينضرب بيها: - $f(x)=(x+2)(x^2-2x+1)$

$= x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$

$= x^3-3x+2$

$f(x)=x^3-3x+2$ الدالة

نعوض مكان كل x ب-x

$f(-x)=(-x)^3-3(-x)+2=-x^3+3x+2$

نقارن

$f(-x)\neq f(x)$

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

$f(-x)\neq -f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات: -نستخدم الدالة الي بسطناها افضل

$f'(x)=3x^2-3$ المشتقة

$f'(x)=0$ نصفرها

$3x^2-3=0$ $\div 3$

$x^2-1=0$ $x=\mp 1$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y

$f(1)=(1)^3-3(1)+2=1-3+2=0$

(1.0)

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=-1+3+2$

$=4$ (-1.4)

صارت عندي نقطة هي $(-1.4)(1.0)$ ونختبرها .

اشارة $f'(x)$: + + + + -1 - - - - 1 + + + +

f متزايدة في $\{x:x>1\},\{x:x<-1\}$

f متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

$(1,0)$ صغرى محلية

$(-1,4)$ عظمى محلية

٦-نجد نقاط الانقلاب: -

$f''(x)=6x$ المشتقة الثانية

$f''(x)=0$ نصفرها

$6x=0$ $\div 6$ $x=0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y

$f(0)=(0)^3-3(0)+2=2$ (0.2)

صارت عندي نقطة هي (0.2) ونختبرها .

اشارة $f''(x)$: - - - - 0 + + + +

تحدب تقعر

$(0,2)$ نقطة الانقلاب

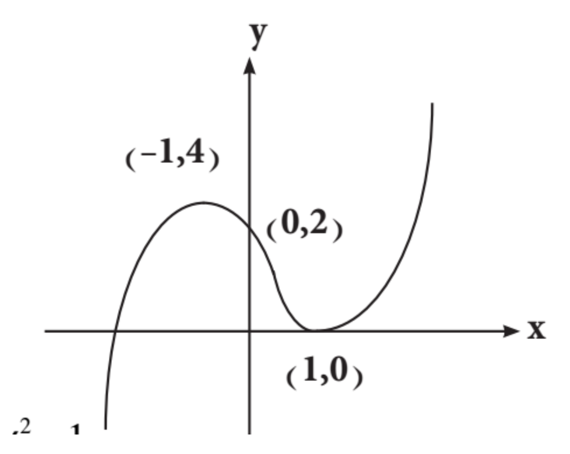
f محدبة في $\{x:x<0\}$

f مقعرة في $\{x:x>0\}$

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .

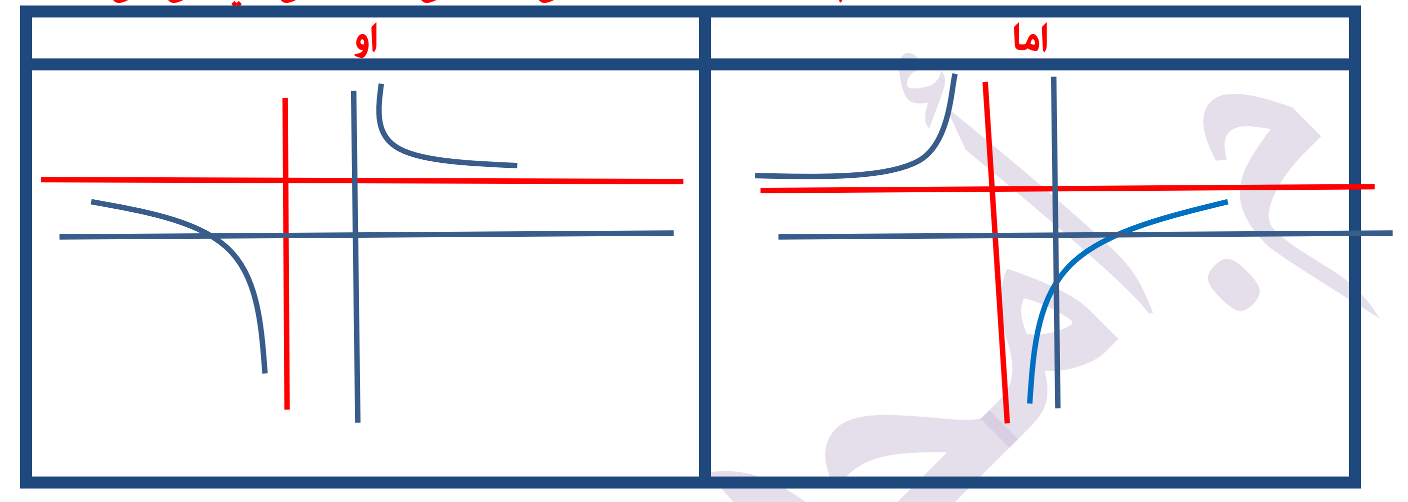
نوع النقطة	x	Y	$(x.y)$
تقاطع+انقلاب	0	2	(0.2)
تقاطع	-2	0	(-2.0)
تقاطع+صغرى	1	0	(1.0)
عظمى	-1	4	(-1.4)
إضافية	2	4	(2.4)

هسه نبدأ باقل قيمة $x=-2$ ونصعد الى العظمى بشكل متحدب x=-1 ننزل متحدبين الى x=0 هاي انقلاب يعني منها ونبدي نغير التقوس نسوي مقعر ثم $x=1$ هاي صغرى منها ونصعد الى النقطة $x=2$ ونستمر الى ما لانهاية بعد .

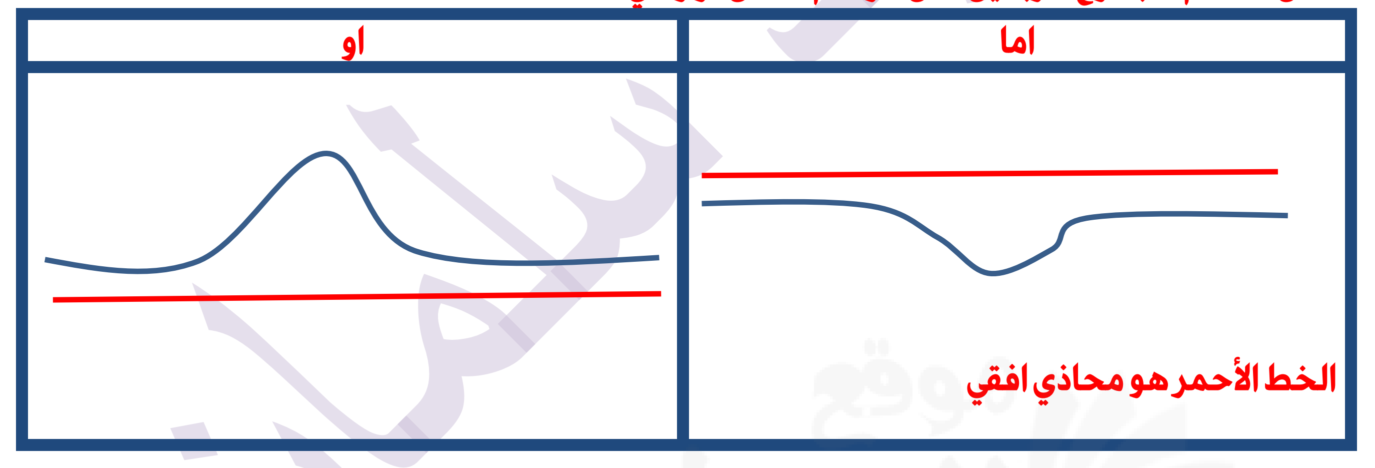


رسم الدوال الكسرية (النسبية)

- ☒ بالنسبة لاوسع مجال لازم نجعل المقام =صفر ونجد قيم x ثم نقول ان أوسع مجال=R ماعدا X .
- ☒ اذا كان المقام مجموع مربعين (رقم $+ x^2$) فان أوسع مجال =R
- ☒ الدالة النسبية-الكسرية تمتلك محاذيات
  - ✓ وهي عبارة عن مستقيمات عمودية وافقية توازي محور السينات والصادات
  - ✓ تسير الدالة بمحاذاتها ولا تقطعها اثناء الرسم .
- ☒ اذا كان الدالة من الدرجة الأولى فان الرسم قوسين متقابلين . ربع اول بربع ثالث او ربع ثاني بربع رابع.



- ☒ اذا كان المقام مجموع مربعين فان الرسم اما تل او وادي.



وكان نشره للعديد من المقالات في مجال الرياضيات وتفسيره للحركة النيوتونية بشكل موسع عن طريق التحليل الرياضي لأول مرة في التاريخ في كتابه الميكانيك ((Mechanicaوضعه على الطريق للتخصص في العمل الرياضي.

بحلول العام ١٧٤٠ كان أويلر قد اكتسب سمعة كبيرة، وترك أكاديمية سانت بطرسبرغ ليستلم منصباً في أكاديمية برلين.

كانت سنوات أويلر الـ ٢٥ التي قضاها في برلين مزدحمة ومليئة بالإنجازات حيث أنه بالإضافة لإنجازاته في المجال الرياضي فقد خدم في لجنة المكتبة والمنشورات العلمية لأكاديمية برلين وكان مستشاراً حكومياً أيضاً.

كتب أويلر حوالي الـ ٣٨٠ مقالة خلال وجوده في برلين بالإضافة إلى العديد من الكتب العلمية الشهيرة ثم ترأس أكاديمية برلين في عام ١٧٥٩ بعد وفاة رئيسها.

في عام ١٧٦٦ عاد أويلر إلى مدينة سانت بطرسبرغ في روسيا بعد دعوته من قبل الإمبراطورة كاترين الثانية ((Catherine IIالتي لقبت فيما بعد بكاترين العظيمة والتي كانت تطمح لخلق نظام من الاستبداد التعليمي في روسيا.

وفي عام ١٧٧١ فقد أويلر بصره. ولكن بفضل ذاكرته الاستثنائية استطاع أن يستمر بعمله وعمل في مجال البصريات والجبر والحركة القمرية .

بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة

$$y = f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

١-نجعل المقام=0. $x+1=0 \quad x=-1$

اوسع مجال للدالة هو $R-\{-1\}$.

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$$f(0) = \frac{3(0)-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

نقطة التقاطع هي $(0.-1)$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$0=\frac{3x-1}{x+1}$ وسطين في طرفين

$3x-1=0 \qquad 3x=1$

$x=\frac{1}{3}$

نقطة التقاطع هي $\left(\frac{1}{3}.0\right)$

٤-التناظر:-

ملاحظة

(اذا ضربت مقدار كسري بسالب فالسالب تروح بس للبسط.)

نعوض مكان كل x ب-x

$$f(-x)=\frac{3(-x)-1}{(-x)+1}=\frac{-3x-1}{-x+1}$$

نقارن

$f(-x)\neq f(x)$

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

$f(-x)\neq -f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات :-

$$f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}$$

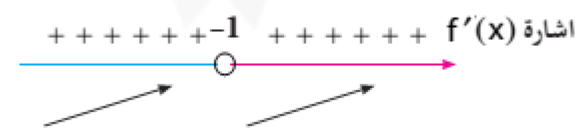
$=\frac{4}{(x+1)^2}$ المشتقة

$$\frac{4}{(x+1)^2}\neq\frac{0}{1}$$

توجد فجوة عند

$x+1=0 \qquad x=-1$

ولا توجد نهايات للدالة لانها غير معرفة عند $x=-1$ (بس نختبر التزايد والتناقص يم الفجوة)



الدالة متزايدة في {x:x>-1} , {x:x <-1} ولاتوجد نقاط حرجة.

٦-نجد نقاط الانقلاب :-شوف اذا المشتقة صارت كسرية والبسط بس رقم لا تشتق قسمة دالتين . صعد المقام للبسط وبعدين اشتق .

$$f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}=4(x+1)^{-2}$$

$$f''(x)=-8(x+1)^{-3}=-\frac{8}{(x+1)^3}$$

لا توجد نقاط انقلاب و توجد فجوة عند x=-1 . (نختبر المشتقة الثانية حتى نشوف التحدب والتقعر.)

اشارة y''(x)   + + + + + + + -1   - - - - - - -

تقعر   تحدب

التحدب $=\{x; x > -1\}$

التقعر $=\{x; x < -1\}$

٦-نجد المحاذيات:

أ-المحاذي العمودي:- هذا خط مستقيم عموديا

$x+1=0 \qquad x=-1$

(يعني نوكف على x=-1 ونجر لنا خط عمودي)

ب-المحاذي الافقي :-(لازم نجعل x بدلالة y .

الخطوات ثابتة :- ١-نضرب وسطين في طرفين .٢-جماعة x على اليسار و الي ما عنده x على جهة اليمين.

٣-عامل مشترك x ٤-ثم $x=\frac{\text{البعيد}}{\text{القريب}}$. ٥-نجعل المقام=صفر

ونطلع قيمة y الي تمثل خط مستقيم افقي مستحيل تمسه الدالة وانما من توصل يمه راح تستدير وتبقى تمشي حذاه .)

$$y=\frac{3x-1}{x+1}$$

$yx+y=3x-1$

$yx-3x=-y-1$ مشترك

$x(y-3)=-y-1$

$$x=\frac{-y-1}{y-3}$$

$y-3=0 \qquad y=3$

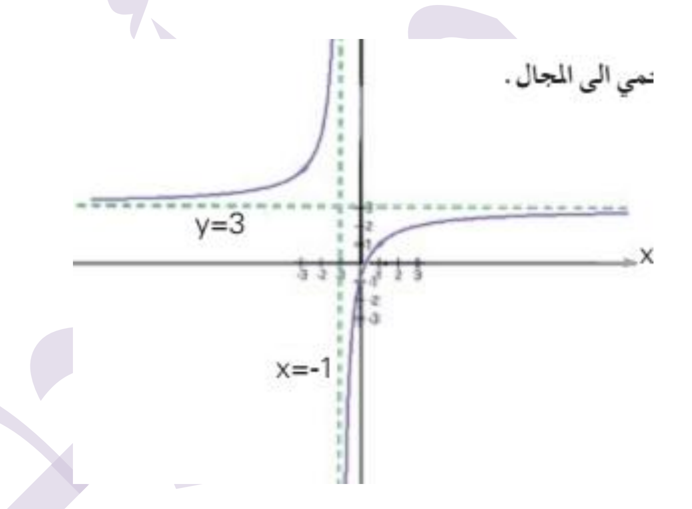
(يعني نروح ل $y=3$ ونجر خط افقي.)

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها.

نوع النقطة		X	Y	$(x.y)$
يمين المحاذي العمودي X=-1	تقاطع	0	-1	$(0.-1)$
	تقاطع	$\frac{1}{3}$	0	$\left(\frac{1}{3}.0\right)$
	إضافية	1	1	(1.1)
يسار المحاذي العمودي X=-1	إضافية	-2	7	(-2.7)
	إضافية	-3	5	(-3.5)
	إضافية	-4	$\frac{13}{3}$	$\left(-4.\frac{13}{3}\right)$

شلون نرسم دالة كسرية: -(لا يكتب بالحل)

- ❖ ارسم الاحداثيات
- ❖ مباشرة جر خط افقي وعمودي الي هم المحاذيات.
- ❖ حدد المحاذي العمودي فقط وحدد النقاط التي تقع يمينه والنقاط التي تقع يساره.
- ❖ لازم يصيرن عند ٣ نقاط بجهة اليمن و٣ بجهة اليسار واذا اقل افرض قيم إضافية وعوض بالدالة الاصلية وطلع قيم y .
- ❖ حدد موقع كل النقاط. وصل بين قيم النقاط الي باليمين بوحدهن وقيم اليسار بوحدهم ودير بالك توصل بين جهة اليمين وجهة اليسار لان راح تضرب المحاذي ويتدمر الرسم كله.



بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

١-نجعل المقام=0. $x+1=0 \quad x=-1$

اوسع مجال للدالة هو $R-\{-1\}$.

٢-نجد نقاط التقاطع :-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$$f(0) = \frac{(0)-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

نقطة التقاطع هي $(0.-1)$

ب-مع محور السينات نجعل f(x)=0

وسطين في طرفين $0 = \frac{x-1}{x+1}$

$x-1=0 \quad x=1$

$x=1$

نقطة التقاطع هي (1.0)

٤-التناظر:- نعوض مكان كل x ب-x

$$f(-x) = \frac{(-x)-1}{(-x)+1} = \frac{-x-1}{-x+1}$$

نقارن

$f(-x) \neq f(x)$

الدالة غير متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) \neq -f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات :-

المشتقة

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

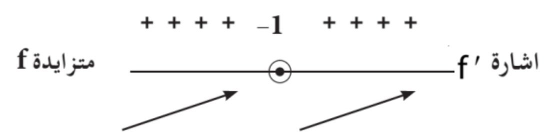
نصفرها $f'(x)=0$

$$\frac{2}{(x+1)^2} \neq \frac{0}{1}$$

توجد فجوة عند

$x+1=0 \quad x=-1$

ولا توجد نهايات للدالة لانها غير معرفة عند $x=-1$ (بس نختبر التزايد والتناقص يم الفجوة)



لا يوجد تناقص والدالة متزايدة دائما.

٦-نجد نقاط الانقلاب :-شوف اذا المشتقة صارت كسرية والبسط بس رقم لا تشتق قسمة دالتين . صعد المقام للبسط وبعدين اشتق .

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = 2(x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = -4(x+1)^{-3} = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

لا توجد نقاط انقلاب و توجد فجوة عند x=-1 . نختبر المشتقة الثانية حتى نشوف التحدب والتقعر.

	$x<-1$	-1	$x>-1$
اشارة $f''(x)$	+ + + +		- - - -
	مقعرة		محدبة

التحدب $=\{x; x>-1\}$

التقعر $=\{x; x<-1\}$

٦-نجد المحاذيات :-

أ-المحاذي العمودي :-.نجعل المقام=صفر مباشرة .

$x+1=0$

$x=-1$

يعني نوكف على x=-1 ونجرلنا خط عمودي.

ب-المحاذي الافقي :-لازم نجعل x بدلالة y .

الخطوات ثابتة :-

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

$yx + y = x - 1$

مشترك $yx - x = -y - 1$

$x(y-1) = -y-1 \qquad x = \frac{-y-1}{y-1}$

$y-1=0 \qquad y=1$

يعني نروح ل $y=1$ ونجر خط افقي.

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .مالات التقاطع ومالات النهايات والانقلاب بس بلا تكرار.

$(x.y)$	Y	X	نوع النقطة	
$(0.-1)$	-1	0	تقاطع	يمين المحاذي العمودي X=-1
(1.0)	0	1	تقاطع	
$\left(2.\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	2	إضافية	
$\left(-4.\frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	-4	إضافية	يسار المحاذي العمودي X=-1
(-2.3)	3	-2	إضافية	
(-3.2)	2	-3	إضافية	

وبمساعدة ابنيه جوهان آلبريخت (Johann Albrecht) و كريستوف (Christoph) وعدد من زملائه استطاع أويلر إنجاز حوالي النصف من أعمال حياته وهو أعمى بالكامل.

وقد وافته المنية في عام ١٧٨٣ جراء تعرضه لسكتة دماغية، ودفن إلى جانب زوجته في مقبرة سمولينسك لوثيران (Smolensk Lutheran).

أما بالنسبة لإسهاماته في مجال الرياضيات فالجدير بالذكر أن أويلر عمل في معظم مجالات الرياضيات واستمرت أكاديمية سانت بطرسبرغ في نشر أبحاثه غير المنشورة لحوالي ٥٠ سنة بعد وفاته.

ومن أهم إسهاماته:

١-الترميز الرياضي:

مهد أويلر لمفهوم التابع وكان أول من يكتب f(x) ليعبر عن التابع f مطبقاً على العنصر x كما أنه عرف الترميز المعاصر للتوابع المثلثية والحرف e للتعبير عن الأساس للوغاريتم الطبيعي والحرف الإغريقي للتعبير عن المجموع والحرف i للتعبير عن الوحدة التخيلية

٢-التحليل

اكتشف أويلر منشور سلاسل القوى من أجل التابع الأسي e وتابع الظل العكسي ((arctan.))وكان اهتمامه بسلاسل القوى قد مكنه من حل مسألة بازل الشهيرة في عام ١٧٣٥ التي تطلب جواباً للمجموع التالي بالإضافة لذلك مهّد لاستخدام التابع الأسي واللوغاريتمات في الإثباتات التحليلية واكتشف طرقاً عديدة لتمثيل التوابع اللوغاريتمية باستخدام سلاسل القوى وعرّف بنجاح اللوغاريتم من أجل الأعداد السالبة والعقدية موسعاً بهذا نطاق التطبيقات الرياضية للوغاريتمات.كما أنه عرف التابع الأسي من أجل الأعداد العقدية وأوجد العلاقة بينها وبين التوابع المثلثية.

٣- نظرية الأعداد:

الكثير من أعمال أويلر في نظرية الأعداد كانت مبنية على أعمال بيير دي فيرمات. وقد طور أويلر بعض أفكار فيرمات ونقض البعض من تخميناته. وربط طبيعة توزع الأعداد الأولية بأفكار تحليلية. حيث أثبت أن مجموع مقلوب الأعداد الأولية متباعد. ومن خلال ذلك اكتشف الرابط بين تابع ريمان-زيتا والأعداد الأولية؛ وهو ما يعرف بصيغة مضروب أويلر على تابع ريمان-زيتا.

أثبت أويلر متطابقات نيوتن والعديد من نظريات فيرمات ولاغرانج. وبحلول العام ١٧٧٢ أويلر كان قد اثبت أن ٢^{٣١}-١=٢١٤٧٤٨٣٦٤٧ هو عدد ميرسين أولي. وبقي هذا العدد أكبر عدد أولي معروف لعام ١٨٦٧.

٤- نظرية البيان-المخططات

من خلال تحليله للخرائط.

- الرياضيات التطبيقية:

العديد من إنجازات أويلر العظيمة كانت في حلّه للمشاكل الواقعية تحليلياً. فقد كامل حسابات ليبنتز التفاضلية مع منهج نيوتن في الحساب التفاضلي وطور أدوات جعلت تطبيق التحليل على المسائل الفيزيائية أسهل، كما أنه اخترع ما يعرف الآن بتقريبات أويلر التي أدت إلى منهج أويلر و معادلة أويلر-ماكلارين. وسهل أيضاً استخدام المعادلات التفاضلية، وبالتحديد عن طريق تقديم ثابت أويلر-ماسكيروني كما كتب أيضا عن الموسيقى

٦- الفيزياء وعلم الفلك:

ساعد أويلر بتطوير معادلة شعاع أويلر-برنولي، التي أصبحت حجر الزاوية في الهندسات. وطبق أدواته التحليلية على مشاكل في الميكانيكا الكلاسيكية. واعترف بأعماله في مجال علم الفلك من قبل أكاديمية باريس التي منحته العديد من الجوائز عليها. وتشمل إنجازاته في علم الفلك تحديد مدارات المذنبات والأجرام السماوية الأخرى،فهم طبيعة المذنبات وحساب اختلاف المنظور للشمس.

بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحنى الدالة

$$y = f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

١-نجعل المقام =0.

$x^2+1=0$

$x^2=-1 \notin R$

اوسع مجال للدالة هو R.اذا المقام مجموع مربعين فان اوسع مجال هو R لان ما يصير المقام صفر.

٢-نجد نقاط التقاطع:-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}=0$$

نقطة التقاطع هي (0.0)

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$$0=\frac{x^2}{x^2+1}$$

وسطين في طرفين $x^2=0$

$x=0$

نقطة التقاطع هي (0.0)

٤-التناظر:-نعوض مكان كل x ب-x

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$$

نقارن

$f(-x)=f(x)$

الدالة متناظرة مع محور الصادات

$f(-x)\neq -f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات: -

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ المشتقة

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{0}{1}$$ وسطين في طرفين

$2x=0$ $\quad x=0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلق قيم f(x)=y

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}=0 \qquad (0.0)$$

اشارة $f'(x)$: - - - - - - - - 0 + + + + + +

تناقص | تزايد

$f(x)$ متزايدة في $\{x:x>0\}$

$f(x)$ متناقصة في $\{x:x<0\}$

$(0,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

٦-نجد نقاط الانقلاب:-

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(2)-2x.2\,(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)[(x^2+1)(2)-8x^2]}{(x^2+1)^4}$$ نختصر

$$f''(x)=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

نجعل $f''(x)=0$

$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^4}=0 \qquad 2-6x^2=0$$

$$x^2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad x=\mp\frac{1}{\sqrt3}$$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلق قيم f(x)=y

$$f\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$=\frac{1}{4} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt3}.\frac{1}{4}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1+3}{3}}=\frac{1}{4} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt3}.\frac{1}{4}\right)$$

اشارة $f''(x)$: - - - - - - $-\frac{1}{\sqrt3}$ + + + + + + $\frac{1}{\sqrt3}$ - - - - - - -

تحدب | تقعر | تحدب

$f(x)$ محدبة في $\{x:x<-\frac{1}{\sqrt3}\},\{x:x>\frac{1}{\sqrt3}\}$

$f(x)$ مقعرة في الفترة المفتوحة $\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$

بالاستعانة بمعلوماتك بالتفاضل ارسم منحني الدالة

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

١-نجعل المقام=0.

$x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1 \notin R$

اوسع مجال للدالة هو R. اذا المقام مجموع مربعين فان اوسع مجال هو R

٢-نجد نقاط التقاطع:-

أ-مع محور الصادات نجعل x=0

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 1}{(0)^2 + 1}$$

$= -1$ نقطة التقاطع هي $(0.-1)$

ب- مع محور السينات نجعل f(x)=0

$$0 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$ وسطين في طرفين

$x^2 - 1 = 0$ $x = \mp 1$

نقطة التقاطع هي (-1.0) (1.0)

٤-التناظر:-نعوض مكان كل x ب-x

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

نقارن

$f(-x) = f(x)$ الدالة متناظرة مع محور الصادات

$f(-x) \neq -f(x)$

الدالة غير متناظرة مع نقطة الاصل

٥-نجد النهايات:-

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$ المشتقة

$f'(x) = 0$ نصفرها

$$\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \neq \frac{0}{1}$$ وسطين في طرفين

$4x = 0$ $x = 0$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y

$$f(0) = \frac{(0)^2 - 1}{(0)^2 + 1} = 0 \qquad (0.-1)$$

اشارة $f'(x)$ − − − − − − − − 0 + + + + + +

تناقص   تزايد

$\{0.-1\}$

٧-نجد المحاذيات:-

أ-المحاذي العمودي:- اذا الدالة كسرية والمقام مجموع مربعين لا يوجد محاذي عمودي.

ب-المحاذي الافقي:-

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1} \qquad yx^2 + y = x^2$$

$yx^2 - x^2 = -y$

$x^2(y - 1) = -y$

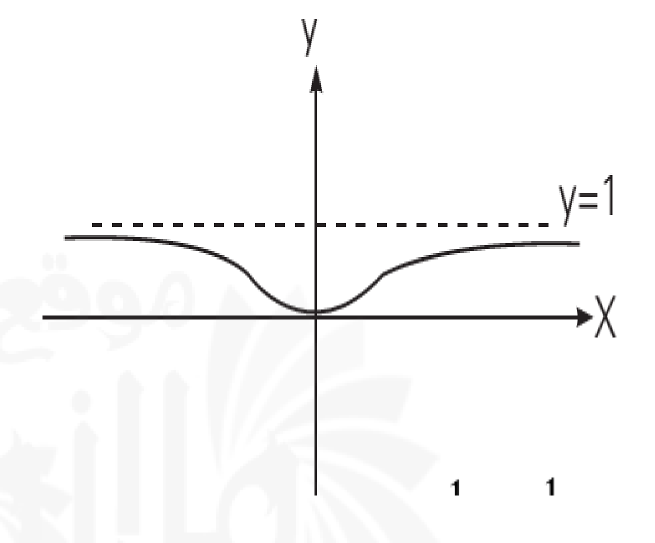
$$x^2 = \frac{-y}{y - 1} \qquad x = \sqrt{\frac{-y}{y - 1}}$$

$y - 1 = 0$

$y = 1$

يعني نروح ل $y=1$ ونجر خط افقي.

نوع النقطة	X	Y	$(x.y)$
تقاطع +صغرى	0	0	(0.0)
تقاطع	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{4})$
إضافية	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{4})$
إضافية	1	$\frac{1}{2}$	$(1.\frac{1}{2})$
إضافية	−1	$\frac{1}{2}$	$(-1.\frac{1}{2})$



$f(x)$ متزايدة في $\{x:x>0\}$

$f(x)$ متناقصة في $\{x:x<0\}$

$(0,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

٦-نجد نقاط الانقلاب :-

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(4)-4x\,.\,2\,(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)[(x^2+1)(4)-16x^2]}{(x^2+1)^4}$$ نختصر

$$f''(x)=\frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$$

نجعل $f''(x)=0$

$$\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^4}=0$$

$$4-12x^2=0$$

$$x^2=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \qquad x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

نعوض قيم x بالدالة الاصلية ونطلع قيم f(x)=y

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1-3}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}.-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1-3}{3}}{\frac{1+3}{3}}$$

$$=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}.-\frac{1}{2}\right)$$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⠀ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

- - - - - - + + + + + + + - - - - - - - - اشارة $f''(x)$

تحدب ⠀ تقعر ⠀ تحدب

$f(x)$ محدبة في $\{x:x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\},\{x:x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$f(x)$ مقعرة في الفترة المفتوحة $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

٦-نجد المحاذيات :-

أ-المحاذي العمودي :- اذا الدالة كسرية والمقام مجموع مربعين لا يوجد محاذي عمودي .

ب-المحاذي الافقي :-

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1} \rightarrow yx^2+y=x^2-1$$

$$yx^2-x^2=-y-1$$

$$x^2(y-1)=-y-1$$

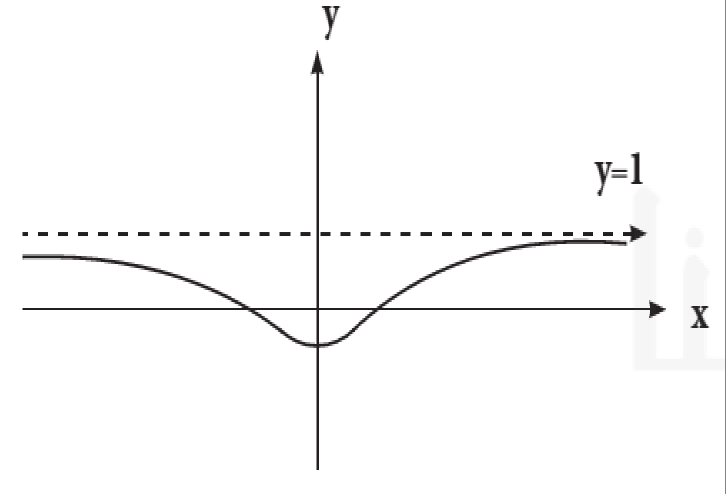
$$x^2=\frac{-y-1}{y-1} \qquad x=\sqrt{\frac{-y-1}{y-1}}$$

$$y-1=0 \qquad y=1$$

يعني نروح لـ $y=1$ ونجر خط افقي .

٧-هسه نجمع كل النقاط الي حصلناها .

نوع النقطة	X	y	$(x.y)$
تقاطع+صغرى	0	-1	$(0.-1)$
انقلاب	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}.-\frac{1}{2}\right)$
انقلاب	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}.-\frac{1}{2}\right)$
تقاطع	1	0	(1.0)
تقاطع	-1	0	(-1.0)



التطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

- ❖ نعوف كل شيء ونروح ندور على العلاقة الرئيسية وتجي بعد او قبل عبارة (اكبر او اعظم ما يمكن) او (اصغر او اقل ما يمكن).
  - ✓ اقل او اكبر (مثلث – مستطيل – مربع – دائرة) = يقصد اقل او اكبر مساحة لهذا الشكل.
  - ✓ اقل او اكبر (اسطوانة – مخروط – كرة – متوازي سطوح – مكعب) = يقصد حجم لهذا الشكل.
- ❖ على ضوء العلاقة الرئيسية افرض المتغيرات الي بالعلاقة.
- ❖ اذا العلاقة الرئيسية تحتوي متغير واحد :-
  - ✓ نشتق العلاقة
  - ✓ نجعلها=0 عند النهايات
  - ✓ نجد المجهول ونختبره بالمشتقة على خط الاعداد.
- ❖ -اذا العلاقة الرئيسية بيها متغيرين . نجد علاقة ثانوية ثم نعوضهم بالعلاقة الرئيسية ويبقى مجهول واحد
  - ✓ نشتق العلاقة
  - ✓ -نجعلها=0 عند النهايات
  - ✓ نجد المجهول ونختبره بالمشتقة على خط الاعداد.
- ❖ نعوضه بالعلاقة الثانوية غصبا عليك وتطلع المجهول الثاني .
- ❖ تكتب المطلوب وتلكاه بعد كلمة (جد) يا اما الابعاد لو الحجم او المساحة او شيء اخر .
- ❖ طريقة الحل تتبع المخطط التالي

الفرضية العلاقة الرئيسية العلاقة الثانوية التعويض الاشتقاق عند النهايات المجهول ثم المطلوب.

سوف اتطرق الى هذا الموضوع بشكل مفصل وعلى شكل حالات

الحالة الأولى

- ❖ مسائل مجهول واحد لا تحتاج الى علاقة ثانوية
- ❖ مسائل الاعداد التي تحتوي مجهولين . العلاقة الثانوية تتكون من مجموعهم او حاصل ضربهم كرقم معلوم معطى بالسؤال .

مثال جد عددين مجموعهم 15 وحاصل جمع مربع الأول مع مكعب الاخر اكبر ما يمكن

العلاقة الرئيسية هنا هي $m = x^2 + y^3$ الثانوية هي x+y=15

مثال جد عدد عند اضافته الى نظيره الضربي يكون الناتج اصغر ما يمكن ؟

بهذا السؤال لا نحتاج علاقة ثانوية لان المجهول عدد واحد فقط .

العلاقة الرئيسية $m = x + \frac{1}{x}$

تحسب عدد المجاهيل على جهة اليمين فقط.

مثال جد عدد زيادته على مربعه اكبر ما يمكن .

العلاقة الرئيسية $m = x - x^2$ لاحظ ان العلاقة تحتوي مجهول واحد . (الزيادة=طرح !!!! معقولة ؟)

مثال ١:- جد العدد الذي عند اضافته الى مربعه يكون الناتج اكبر ما يمكن ؟

الفرضية :- العدد $= x$ مربعه $= x^2$ ناتج الاضافة =اصغر ما يمكن= m (هاي هي العلاقة الرئيسية خوشن).

العلاقة :- نشتق لان بس مجهول واحد (x) $m = x + x^2$

الاشتقاق :-

$$\frac{dm}{dx} = 1 + 2x$$

عند النهايات:- $\frac{dm}{dx} = 0$

$1 + 2x = 0$ $2x = -1$ $x = -\frac{1}{2}$

(نكدر نتأكد لازم عند قيمة $x = -\frac{1}{2}$ توجد نهاية صغرى لان كايل اصغر ما يمكن . طبعا اكدر اتاكد من خط الاعداد واكدر استخدم فحص المشتقة الثانية اذا طلع الناتج موجب فيعني توجد نهاية صغرى)

$m''(x) = 2$ $m''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ (موجب)

توجد نهاية صغرى عند $x = -\frac{1}{2}$

المطلوب :- العدد هو $= -\frac{1}{2}$

تمارين :- جد عددين موجبين مجموعهم 75 وحاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن ؟

الفرضية :- العدد الاول $= x$ والثاني $=y$ (العلاقة الرئيسية اذا ضربنا واحد منهم بمربع الثاني =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $m = x.y^2 ---1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .

$x + y = 75$ $x = 75 - y$ $----2$

التعويض :- $m = (75 - y).y^2 = 75y^2 - y^3$

الاشتقاق :-

٢٠٠٨د٤-٢٠١٠ تمهيدي

$$\frac{dm}{dy} = 150y - 3y^2$$

عند النهايات:- $\frac{dm}{dy} = 0$

$150y - 3y^2 = 0$ $\div 3$ $50y - y^2 = -1$ $y(50 - y) = 0$

اما $y = 0$ (يهمل لان مو موجب) او $50 - y = 0$ $y = 50$

(نكدر نتأكد لازم عند قيمة $y = 50$ توجد نهاية عظمى لان كايل اكبر ما يمكن . طبعا اكدر اتاكد من خط الاعداد واكدر استخدم فحص المشتقة الثانية اذا طلع الناتج سالب فيعني توجد نهاية عظمى)

$m''(y) = 150 - 6y$ $m''(50) = -150$ (سالب)

توجد نهاية عظمى عند $y = 50$.

نعوض في معادلة2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني.

$x = 75 - 50 = 25$

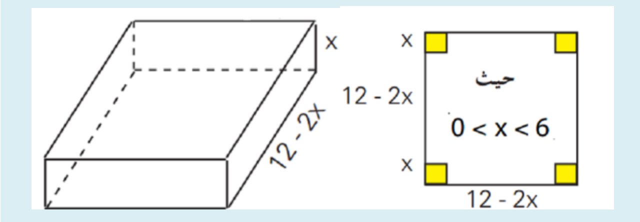
المطلوب :- العدد الاول هو $= 25$ العدد الثاني هو $= 50$

مثال ٢-وزاري: صنع صندوق من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها 12cm وذلك بقص اربع مربعات متساوية الابعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها ماهو الحجم الأعظم لهذا الصندوق.

الفرضية :- حجم الصندوق =v

الجزء المقطوع =x (العلاقة الرئيسية اعظم حجم للصندوق

الي هو شكل متوازي سطوح مستطيلة =اعظم ما يمكن)



العلاقة :- (متغير واحد) $V = l.w.h = (12 - 2x)(12 - 2x)x = (12 - 2x)^2\, x$

الاشتقاق :- ضرب دالتين

٢٠٠٥د٢

$$\frac{dv}{dx} = (12 - 2x)^2 .1 + x\ \ 2(12 - 2x)\ .-2 = \text{تبسيط} = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x)$$
$$= (12 - 2x)\ [(12 - 2x) - 4x] = (12 - 2x)[12 - 6x]$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dx} = 0$

$(12 - 2x)[12 - 6x] = 0$ اما $12 - 2x = 0$ $2x = 12$ $x = 6cm$

يهمل غير معقول (ما يصير المربع الي تكصه من الركن يساوي نص البليتة اذا هيج ما بقى شيء للقاعدة صدك جذب)

او $12 - 6x = 0$ $6x = 12$ $x = 2cm$

كلش معقول هسه .(ما نحتاج نتاكد بالمشتقة الثانية لان صعبة بشكل تصير ومادام معقول اذن الحل صحيح .)

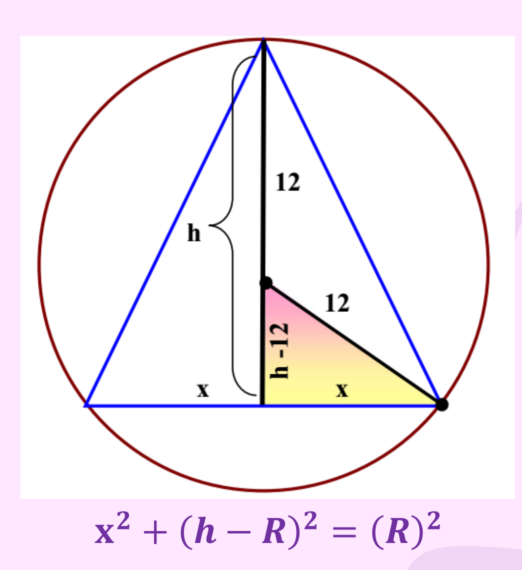
المطلوب :- اعظم حجم

$V = (12 - 2.2)^2\, .2 = 64.2 = 128\ cm^3$

الحالة الثانية

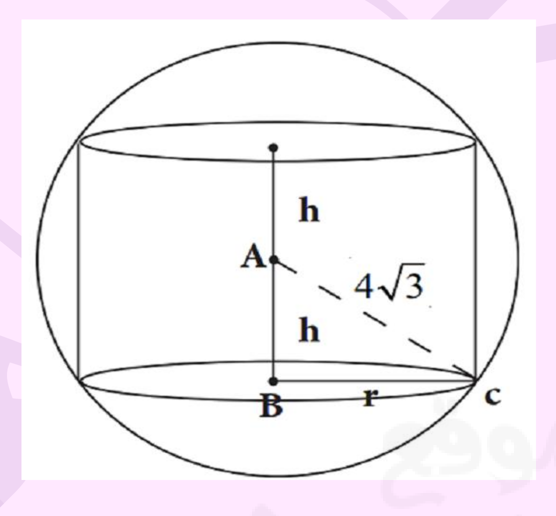
كل شكل داخل دائرة او كرة فان العلاقة الثانوية = مثلث فيثاغورس

- **شكل (مثلث –مخروط) يوضع داخل (دائرة –كرة) فان العلاقة الثانوية هي مثلث قائم الزاوية نطبق عليه مبرهنة فيثاغورس حيث ان نصف قطر الدائرة يصبح الوتر للمثلث القائم . والمثلث القائم هو هذا**



$$x^2 + (h - R)^2 = (R)^2$$

- **شكل (مستطيل-أسطوانة) توضع داخل (دائرة – كرة) فان العلاقة الثانوية أيضا مثلث فيثاغورس .**



$$r^2 + h^2 = (R)^2$$

- **اذا اعطى مثلث متساوي الساقين لكن معلوم كل من ساقيه نقسم المثلث ويصبح قائم نطبق عليه المبرهنة مباشرة. حيث طول الساق يصبح وترا.**
- **اذا اعطى مثلث قائم معلوم وتره يدور حول احد ضلعيه ويشكل شكل مخروط نطبق على المثلث القائم المبرهنة مباشرة .**
  علاقة فيثاغورس هي

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{مجاور})^2 + (\text{مقابل})^2$$

- **اذا طلب الابعاد فان ابعاد المستطيل=طوله و عرضه. والمثلث =طول القاعدة –الارتفاع . الدائرة والكرة =نصف القطر فقط . الأسطوانة و المخروط =نصف القطر والارتفاع .**

مثال.٢٠١٦: جد بعدي اكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها 12cm ،ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$



الفرضية:- مساحة المثلث =A طول القاعدة $= 2x$ والارتفاع $=h$

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمثلث =اكبر ما يمكن)

العلاقة:- $A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}.2x.h = xh \quad --1$

العلاقة الثانوية:-

$$x^2 + (h-12)^2 = (12)^2$$

٢٠٠٣-٢٠٠٦-٢٠١٠-٢٠١٢

$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 = 24h - h^2 \qquad x = \sqrt{24h - h^2} \quad ----2$$

التعويض:- $A = xh = h\sqrt{24h - h^2}$

اذا نعوفها هيج تعتبر ضرب دالتين .لذلك الافضل نتخلص من h ندخلها على الجذر بس نربع وبعدين ندخلها لان جذر تربيعي .وبعدين نشتق بطريقة الجذر التربيعي السريعة .

$$A = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

الاشتقاق:-

$$\frac{dA}{dh} = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dh} = 0$

$$\frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0$$ وسطين في طرفين $72h^2 - 4h^3 = 0 \qquad \div 4$

$h^2(18 - h) = 0$ اما $h^2 = 0$ يهمل

او $18 - h = 0 \qquad h = 18cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$x = \sqrt{24h - h^2} = \sqrt{24 \times 18 - 18^2} = \sqrt{18(24-18)} = \sqrt{18.6} = \sqrt{108} = \sqrt{36.3} = 6\sqrt{3}\ cm$$

المطلوب:- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني الابعاد يعني طول القاعدة والارتفاع مالات المثلث

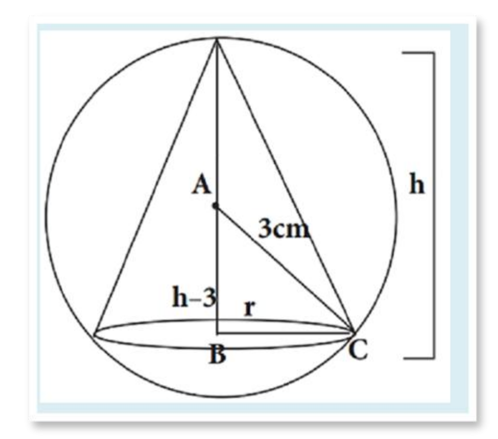
طول القاعدة $2x = 2.6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}cm$

الارتفاع $h = 18cm$

مطلب ثاني :- اثبات النسبة بين المساحتين

$$\frac{A_{\text{المثلث}}}{A_{\text{الدائرة}}} = \frac{xh}{\pi r^2} = \frac{6\sqrt{3}.18}{\pi(12)^2} = \frac{6.6.3\sqrt{3}}{12.12.\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

تمارين: جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3cm ؟



الفرضية :- v= حجم المخروط h = الارتفاع r= نصف قطره

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمخروط =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- شكل مثلث داخل دائرة دائما تطبق فيثاغورس عليه .

المثلث ABC

$$r^2 + (h-3)^2 = (3)^2$$

$$\rightarrow \ r^2 + h^2 - 6h + 9 = 9$$

$$r^2 = 6h - h^2 \quad ---2$$

التعويض :- $v = \frac{\pi}{3}(6h - h^2)h = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3) \quad --1$

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2)$$

١د٢٠٠٨

عند النهايات:- $\frac{dv}{dh} = 0$

$$\frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0 \qquad \div \frac{\pi}{3} \qquad 12h - 3h^2 = 0 \qquad \div 3 \qquad 4h - h^2 = 0$$

$h(4-h) = 0$ اما $h = 0$ يهمل

او $4 - h = 0$ $h = 4cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$r^2 = 6h - h^2 = 6.4 - 16 = 8$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني حجم المخروط .

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} . 8 . 4 = \frac{32}{3} \pi \ cm^3$$

ملاحظة مهمة ١- يمكن ادخال أي مقدار على جذر مهما كان بشرط ان يرفع لنفس دليل الجذر .

$$A \sqrt[n]{x+y} = \sqrt[n]{A^n x + A^n y}$$

بحيث أ- اذا كا الجذر زوجي فان A لا تدخل الا اذا كانت عدد موجب فقط .

ب- اذا كان الجذر الفردي فان A تدخل مباشرة مهما كانت قيمته .

٢- في موضوع الاطوال والارتفاعات لا نحتاج ان نتحقق من المشتقة وانما تؤخذ القيمة المعقولة فقط .

تمارين: جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}cm$



(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة:- $A == 2x.y \quad --1$

العلاقة الثانوية:- نطبق فيثاغورس عليه .المثلث ABC

$$x^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2 \;\rightarrow\; y^2 = 32 - x^2$$

$$y = \sqrt{32 - x^2} \quad --2$$

التعويض:- $A = 2xh = 2x\sqrt{32 - x^2}$

همينا نتخلص من x نربعها وندخلها .

$$A = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$$

الاشتقاق:-

٢٠٠٩-٢٠١١-٢٠١٢-٢٠١٣-٢٠١٦-٢٠١٥

$$\frac{dA}{dx} = 2\frac{64x - 4x^3}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = \frac{64x - 4x^3}{\sqrt{32x^2 - x^4}}$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$\frac{64x - 4x^3}{2\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0$ وسطين في طرفين $64x - 4x^3 = 0 \quad \div 4$

$x(16 - x^2) = 0$ اما $x = 0$ يهمل

او $16 - x^2 = 0 \quad x^2 = 16 \quad x = 4cm$

نعوض في معادلة2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = \sqrt{32 - x^2} = \sqrt{32 - 16} = 4\ cm$$

المطلوب:- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني الابعاد يعني طول المستطيل العرض

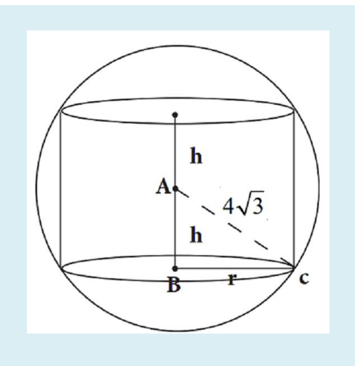
الطول $2x = 2.4 = 8cm$,العرض $y = 4cm$

يجوز واحد منكم يكول ليش جاي تفرض مرات الطول =2x ليش مو x بس؟ راح اجاوبه :- حتى من اخذ العلاقة الثانوية مالت فيثاغورس ما يصير بيها كسور لان لو نفرض x من انصف المثلث يصير المجاور $\frac{x}{2}$ وحتى اخلص من هاي المشكلة افرض الطول =2x . باي مثلث يصير عندك بيه كسور ارجع غير الفرضية مالتك .

ملاحظة مهمة

لو جاء سؤال بهذه الهيئة (جد مساحة اكبر أسطوانة) فان العلاقة الرئيسية هو حجم الأسطوانة و المساحة هي مطلوب نهائي يعني من نطلع r,h بالنهاية نعوضهم بقانون مساحة الأسطوانة حتى نوجد قيمة المساحة .

تمارين: جد ارتفاع اكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}\ cm$ ؟



الفرضية :- حجم الاسطوانة =V نصف قطرها = r الارتفاع =$2h$

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم للأسطوانة =اكبر ما يمكن)

العلاقة:- $V = \pi r^2 2h = 2\pi r^2 h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- نطبق فيثاغورس عليه .المثلث ABC

$$r^2 + h^2 = (4\sqrt{3})^2 \rightarrow r^2 = 48 - h^2$$

التعويض:- $V = 2\pi h(48 - h^2) = 2\pi(48h - h^3)$

الاشتقاق:-

٢٠١٢-د٣

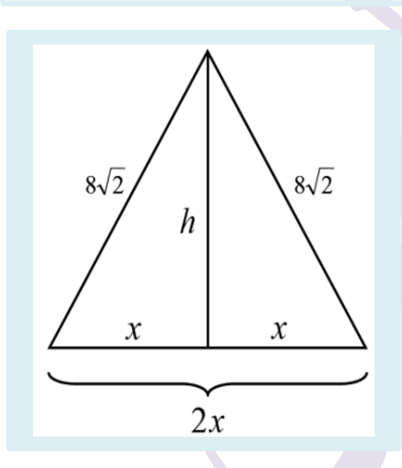
$$\frac{dv}{dh} = 2\pi(48 - 3h^2)$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dh} = 0$

$$2\pi(48 - 3h^2) = 0 \qquad \div 2\pi \qquad 48 - 3h^2 = 0 \qquad h^2 = \frac{48}{3} = 16 \qquad h = 4cm$$

المطلوب :- الارتفاع فقط لا حجم ولا نصف قطر اذن الارتفاع = 2h=8cm

تمارين جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}\ cm$



الفرضية :- مساحة المثلث =A طول القاعدة = $2x$ والارتفاع =h

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمثلث =اكبر ما يمكن)

العلاقة:- $A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}.2x.h = xh \quad --1$

العلاقة الثانوية :- اذا نزلت الارتفاع الى نصف القاعدة .يصير عندي مثلث قائم الزاوية

يعني نطبق علاقة ثانوية هي مبرهنة فيثاغورس .

$$x^2 + h^2 = (8\sqrt{2})^2 \qquad h^2 = 128 - x^2$$

$$h = \sqrt{128 - x^2} \quad -----2$$

التعويض:- $A = xh = x\sqrt{128 - x^2}$

٢٠١٦ تمهيدي

$$A = \sqrt{128x^2 - x^4}$$

الاشتقاق:-

$$\frac{dA}{dx} = \frac{256x - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}}$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$\frac{256x - 4x^3}{2\sqrt{128x^2 - x^4}} = 0$ وسطين في طرفين $256x - 4x^3 = 0$ $\div 4$

$64x - x^3 = 0$ $x(64 - x^2) = 0$ اما $x = 0$ يهمل

شوف بالقياسات ماكو لا صفر ولا طول او ارتفاع او مساحة او محيط يكون مقداره سالب لذلك كبل يهمل .

او $64 - x^2 = 0$ $x^2 = 64$ $x = 8cm$

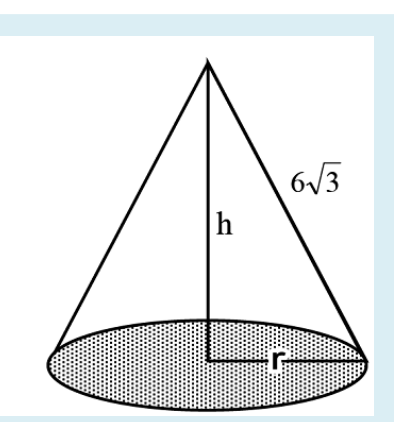
نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$h = \sqrt{128 - x^2} = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8cm$

المطلوب :- اكبر مساحة للمثلث

$A = x.h = 8.8 = 64\ cm^2$

تمارين : جد حجم اكبر مخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}\ cm$ دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين .



الفرضية :- حجم المخروط =v الارتفاع = h نصف قطره= r

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمخروط =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد. من المثلث القائم الزاوية .

$r^2 + (h)^2 = (6\sqrt{3})^2 \rightarrow r^2 + h^2 = 108 \qquad r^2 = 108 - h^2 \quad ---2$

التعويض :- $v = \frac{\pi}{3}(108h - h^3\ )h = \frac{\pi}{3}(108h - h^3) \quad --1$

الاشتقاق :- $\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2)$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dh} = 0$

$\frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0$ $\div \frac{\pi}{3}$ $108 - 3h^2 = 0$ $\div 3$ $36 - h^2 = 0$

٢٠٠٦-٢٠٠٩-٢٠١١-٢٠١٤

$h^2 = 36$ $h = 6cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$r^2 = 108 - 36 = 72$ $r = \sqrt{72} = \sqrt{36 .2} = 6\sqrt{2}cm$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني حجم المخروط .

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3}. 72.6 = 144\pi\ cm^3$

الحالة الثالثة

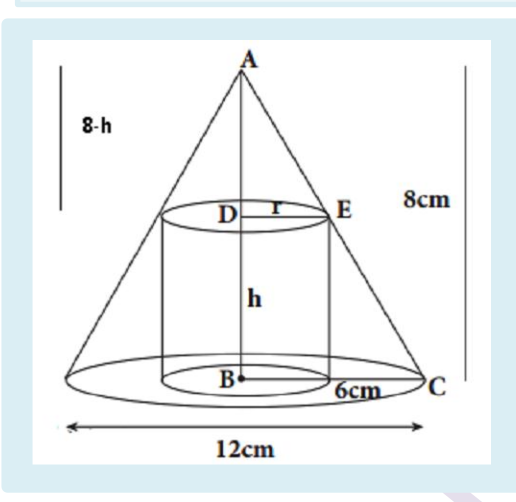
- كل شكل (مستطيل –مثلث مقلوب-أسطوانة-مخروط مقلوب) يوضع داخل (مثلث شرط متساوي الساقين او الاضلاع -مخروط) فان العلاقة الثانوية نقسم المثلث الكبير الى نصفين ونطبق تشابه مثلثات باستخدام علاقة tanx

$$tan\theta = \frac{\overbrace{\text{مقابل}}^{\text{المثلث الصغير}}}{\text{مجاور}} = \frac{\overbrace{\text{مقابل}}^{\text{المثلث الكبير}}}{\text{مجاور}}$$

- اذا كان المثلث غير متساوي الساقين او الاضلاع نطبق تشابه مثلثات

$$\frac{\text{طول ضلع اخر في المثلث الكبير}}{\text{طول نفس الضلع المثلث الصغير}} = \frac{\text{طول ضلع في المثلث الكبير}}{\text{طول نفس الضلع المثلث الصغير}}$$

تمارين : جد ابعاد اكبر أسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm



الفرضية :- حجم الاسطوانة =v الارتفاع $= h$ نصف قطره $= r$

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم للاسطوانة =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v = \pi r^2 h \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام الشكل الخارجي مثلث نستخدم تشابه مثلثات بعلاقة tanx.

المثلث ABC يشبه المثلث ADE

$$tan\theta = \text{المثلث الصغير} = \frac{r}{8-h} = \text{الكبير} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{r}{8-h} = \frac{3}{4} \qquad \frac{r}{8-h} = \frac{6}{8}$$

٢٠١٥-٢٠١٨د١

$4r = 24 - 3h \qquad 3h = 24 - 4r \quad \div 3$

$h = 8 - \frac{4}{3} r \quad ------2$

طلعت h حتى ما ادخل بسالفة r^2 وبعدين تتربع وكذا .

التعويض :- $v = \pi r^2 \left(8 - \frac{4}{3} r\right) = \pi(8r^2 - \frac{4}{3} r^3) \quad --1$

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dr} = \pi(16r - 4r^2)$$

عند النهايات :- $\frac{dv}{dr} = 0$

$\pi(16r - 4r^2) = 0 \quad \div \pi \qquad 16r - 4r^2 = 0 \quad \div 4 \qquad 4r - r^2 = 0$

$r(4-r) = 36$ اما $r = 0$ يهمل او $r = 4\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

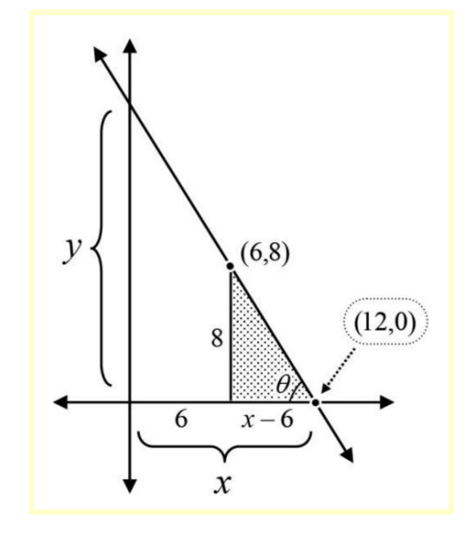
$h = 8 - \frac{4}{3}.4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3}\ cm$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني ابعاد الاسطوانة .

نصف القطر= r=4 cm   الارتفاع = h=$\frac{8}{3}\ cm$

تمارين : جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6.8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول اصغر مثلث .

٢٠١١-٢٠١٨-د١ احيائي



باوع على الرسم المستقيم يمر لازم بالنقطة ولازم يصنع مثلث بالربع الاول

الفرضية :- مساحة المثلث =A طول القاعدة = x والارتفاع =y

مادام احداثيات ما يصير نفرض الابعاد بغير x,y

(العلاقة الرئيسية اصغر مساحة للمثلث =اصغر ما يمكن)

العلاقة :- $A = \frac{1}{2}(\text{القاعدة})(\text{الارتفاع}) = \frac{1}{2}.x.y \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مادام الشكل الخارجي مثلث بداخله مثلث نستخدم

تشابه مثلثات بعلاقة tanx.

$tan\theta = \text{المثلث الصغير} = \frac{8}{x-6} = \text{الكبير} = \frac{y}{x}$

$\frac{8}{x-6} = \frac{y}{x} \qquad y = \frac{8x}{x-6} \quad ---2$

التعويض :- $A = \frac{1}{2}.x.y = \frac{1}{2}x\frac{8x}{x-6} = \frac{4x^2}{x-6}$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(x-6)(8x) - 4x^2.1}{(x-6)^2} = \frac{8x^2 - 48x - 4x^2}{(x-6)^2} = \frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2}$$

عند النهايات :- $\frac{dA}{dx} = 0$

$\frac{4x^2 - 48x}{(x-6)^2} = 0$ وسطين في طرفين $4x^2 - 48x = 0 \quad \div 4$

$x^2 - 12x = 0 \qquad x(x-12) = 0$ اما $x = 0$ يهمل

او $x - 12 = 0 \qquad x = 12\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$y = \frac{8.12}{12-6} = \frac{8.12}{6} = 8.2 = 16cm$

المطلوب :- اكبر معادلة المستقيم $(y - y_1) = m(x - x_1)$

نحتاج نقطة يمر بيها المستقيم وهي موجودة (6.8) ونحتاج ميل المستقيم .

ميل المستقيم يطلع ب 3 طرق هي (لو عندك معادلة و تكول ميل المستقيم =-معامل x\معامل y . لو تشتق معادلته .وطبعا تحتاج معادلة بهاي الحالتين ولو عندي المعادلة جا المن بعد حال السؤال اكله يابه هاي المعادلة وافض المشكلة .

زين . بقت طريقة ثالثة نطلع بيها ميل المستقيم دارسينها بالرابع والخامس علمي وهي

$$\text{ميل المستقيم} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

بس هاي الطريقة تحتاج الى نقطتين يمر بيهم المستقيم عندي نقطة بقت نقطة ثانية هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات .هذا الكلام كله ما ينكتب الحل).هسه ارجع للحل المطلوب

نقطة تقاطع المستقيم مع السينات هي $(x.0)(12.0)$ نعتبرها نقطة ثانية ونجد الميل

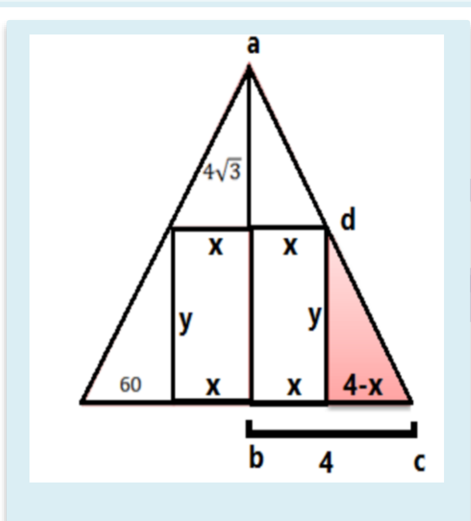
$$\text{ميل المستقيم} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-8}{12-6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

ومن النقطة $(6,8)$ والميل $m=\frac{-4}{3}$ نكتب المعادلة ولازم نبسطها لحد التصفير كلششششش.

$$(y-8) = \frac{-4}{3}(x-6) \qquad \times 3 \qquad 3y - 24 = -4(x-6)$$

$$3y - 24 + 4(x-6) = 0 \qquad 3y - 24 + 4x - 24 = 0 \qquad 3y + 4x - 48 = 0$$

٢٠٠٨: جد مساحة اكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الاضلاع ارتفاعه $4\sqrt{3}cm$



الفرضية :- مساحة المستطيل =A طوله $2x$ العرض $y=$.

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A == 2x.y \quad --1$

العلاقة الثانوية :- ما دام الشكل الخارجي مثلث

فالعلاقة علاقة tanx. المثلث ABC يشبه المثلث DEC الملون .

طبعا راح نواجه مشكلة انو نحتاج طول ضلع المثلث. اكو معلومة تكول المثلث المتساوي الاضلاع كل زاوية منه = 60 درجة .

$$tan60 = \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{BC} \qquad BC = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\ cm$$

$$tan\theta = \text{المثلث الصغير} = \frac{y}{4-x} = \text{الكبير} = \frac{4\sqrt{3}}{4} \qquad \frac{y}{4-x} = \sqrt{3}$$

$$y = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x \qquad ---2$$

التعويض :- $A = 2x.\left(4\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x\right) = 8\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2$



الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\,x$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\,x = 0 \qquad \div 4\sqrt{3} \qquad 2 - x = 0 \qquad x = 2\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}.2 = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ cm$$

المطلوب :- اكبر مساحة للمستطيل .

$$A = 2x.y = 2.2.2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\ \ cm^2$$

مثال :- جد بعدي اكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته 24cm وارتفاعه 18cm بحيث راسين متجاورين من رؤوسه على القاعدة والراسان الاخران على ساقيه

الفرضية :- مساحة المستطيل =A الطول $y =$ والعرض $x=$

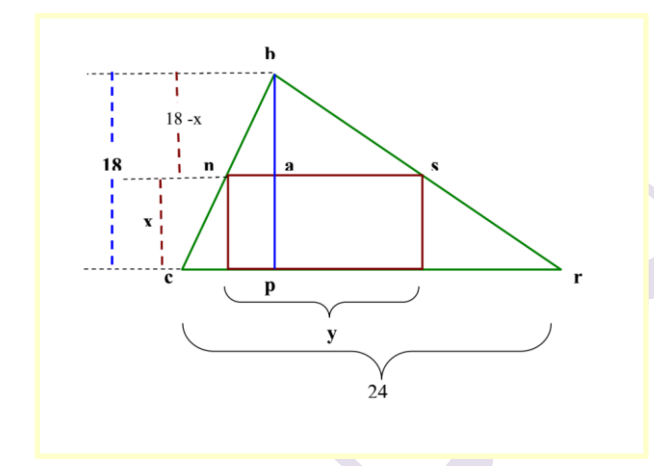
(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A = x.y$

العلاقة الثانوية :- هنا ما نكدر نطبق علاقة tanx

لان اغلب الاضلاع مجهولة ولا توجد زاوية نبني عليها العلاقة .

لذلك راح استخدم تشابه مثلثات حيث hns يشبه المثلث hcr



$$\frac{\text{طول ضلع اخر في المثلث الكبير}}{\text{طول نفس الضلع المثلث الصغير}} = \frac{\text{طول ضلع في المثلث الكبير}}{\text{طول نفس الضلع المثلث الصغير}}$$

$$\frac{24}{y} = \frac{18}{18-x} \rightarrow \frac{4}{y} = \frac{3}{18-x} \rightarrow 3y = 4(18-x) \qquad y = \frac{4}{3}(18-x) \qquad -2$$

التعويض :- $A = x.\frac{4}{3}(18-x) = \frac{4}{3}(18x - x^2)$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = \frac{4}{3}(18-2x)$$

٢٠١٣-٢٠١٥ تمهيدى

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$\frac{4}{3}(18-2x)=0 \qquad \div\frac{4}{3} \qquad 18-2x=0 \qquad \div 2$

$9-x=0 \qquad x=9\ cm$

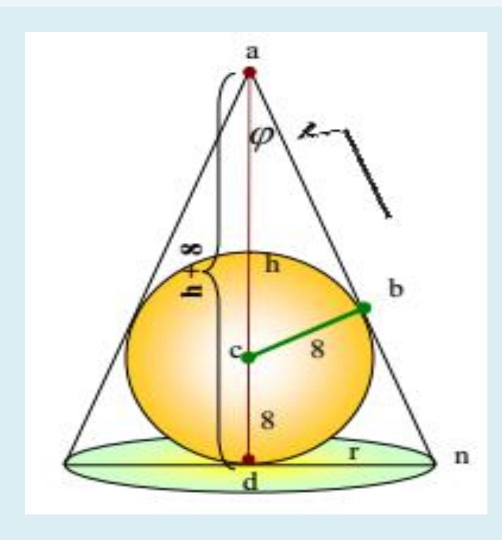
نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$y=\frac{4}{3}(18-9)=y=\frac{4}{3}.9=4.3=12\ cm$

المطلوب :- الابعاد

عرض المستطيل = $x=9\ cm$ الطول= $y=12\ cm$

٢٠٠٨ :- جد اكبر مخروط دائري قائم يحيط بدائرة نصف قطرها 8cm ؟.



الفرضية :- حجم المخروط =v الارتفاع = $h+8$

نصف قطره= r

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمخروط =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $v=\frac{\pi}{3}r^2(h+8) \quad --1$

العلاقة الثانوية :- شكل دائرة داخل مثلث يعني تشابه مثلثات .

المثلث ABC يشبه المثلث ADN .

فكرة هذا السؤال قوية المثلث ADN قائم في D والمثلث ABC قائم في B وليس C .

$tan\theta=$ المثلث الصغير $=\frac{CB}{AB}=\frac{8}{ab}=$ الكبير $=\frac{r}{h+8}$

لازم نطلع طول ab من مبرهنة فيثاغورس على المثلث ABC .

$(8)^2+(ab)^2=(h)^2 \qquad (ab)^2=h^2-64$

$ab=\sqrt{h^2-64}$

نعوض قيمة ab في المعادلة الثانوية .

$\frac{8}{ab}=\frac{r}{h+8} \qquad \frac{8}{\sqrt{h^2-64}}=\frac{r}{h+8}$ بالتربيع

$\frac{64}{h^2-64}=\frac{r^2}{(h+8)^2} \qquad r^2=\frac{64(h+8)^2}{h^2-64}=64\frac{(h+8)^2}{(h-8)(h+8)}$

$r^2=64\frac{h+8}{h-8} \quad ---2$

التعويض 1-- $v = \frac{\pi}{3} r^2 (h+8) = \frac{\pi}{3} 64 \frac{h+8}{h-8} (h+8) = \frac{64\pi}{3} \frac{(h+8)^2}{(h-8)}$

الاشتقاق:-

$$\frac{dv}{dh} = \frac{64\pi}{3} \frac{(h-8)2(h+8)^1 - (h+8)^2.1}{(h-8)^2}$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dh} = 0$

$$\frac{64\pi}{3} \frac{(h-8)2(h+8)^1 - (h+8)^2.1}{(h-8)^2} = 0 \qquad \div \frac{64\pi}{3}$$

$2(h-8)(h+8) - (h+8)^2 = 0 \qquad (h+8)[2(h-8) - (h+8)] = 0$

اما $(h+8) = 0 \qquad h = -8$ يهمل

او $[2(h-8) - (h+8)] = 0 \qquad 2h - 16 - h - 8 = 0 \qquad h - 24 = 0$

$h = 24\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$r^2 = 64 \frac{h+8}{h-8} = 64.\frac{24+8}{24-8} = 64.\frac{32}{16} = 128 \qquad r = \sqrt{128} = \sqrt{64.2} = 8\sqrt{2}cm$

المطلوب:- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني حجم المخروط .

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 (h+8) = \frac{\pi}{3}.128.(24+8) = \frac{4096}{3} \pi\ cm^3$$

الحالة الرابعة مهمة تتكرر كثيرا

- معطى بالسؤال : الحجم او المساحة او المحيط كرقم معلوم .
- المطلوب : مساحة او حجم او محيط .
- العلاقة الثانوية راح تكون هنا هي الرقم المعلوم .

تمارين : جد اقل محيط لمستطيل مساحته 16 مترمربع.

الفرضية:- مساحة المستطيل =A ومحيطه =P الطول $= x$ والعرض =y

(العلاقة الرئيسية اقل محيط للمستطيل =اقل ما يمكن)

العلاقة:- $P = 2(x+y) --- 1$

العلاقة الثانوية:- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد .

$A = x.y \qquad 16 = x.y \qquad y = \frac{16}{x} \qquad ----2$

التعويض:- $P = 2(x+y) = 2\left(x+\frac{16}{x}\right) = 2x + 32x^{-1}$

الاشتقاق:-

٢٠٠٥-٢٠٠٦-٢٠١٥

$$\frac{dp}{dx} = 2 - 32x^{-2} \quad = 2 - \frac{32}{x^2}$$

عند النهايات:- $\frac{dp}{dx} = 0$

$$2 - \frac{32}{x^2} = 0 \qquad 2 = \frac{32}{x^2} \qquad 2x^2 = 32 \qquad x^2 = 16 \qquad x = 4cm$$

نتاكد من المشتقة الثانية

$$m''(x) = +64x^{-3} = \frac{64}{x^3} \qquad m''(4) = \frac{64}{4^3} = + \quad (\text{موجب})$$

توجد نهاية صغرى عند $x = 4$. نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = \frac{16}{4} = 4\ cm$$

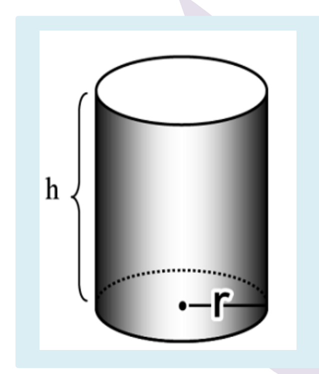
وهذا يعني ان اقل محيط عندما يكون المستطيل بشكل مربع بحيث الطول والعرض يتساوون .

المطلوب:- اقل محيط

$$P = 2(4+4) = 16\ cm$$

اكو سؤال وزاري نفس الحل واعتقد مكتوب بيه (اثبت ان اكبر مستطيل محيطه *40cm* يكون مربعا نفس الحل بس العلاقة الرئيسية راح تصير المساحة والثانوية المحيط وتعوضه بالمساحة وبعدين نفس الخطوات)

تمارين : حاوية اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\pi cm^3)$ جد ابعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم فى صنعها اقل مايمكن .



الفرضية:- مساحة الاسطوانة =A الارتفاع = h نصف قطره= r

(العلاقة الرئيسية اقل مساحة للاسطوانة =اقل ما يمكن)

العلاقة:- مساحة الاسطوانة =محيط القاعدة. الارتفاع + 1 مساحة القاعدة .

$$A = 2\pi r.h + 1.\pi r^2 \quad --1$$

العلاقة الثانوية:- مادام العلاقة الرئيسية بيها اثنين متغيرات

ما يصير نشتق لازم نتخلص من واحد. هنا منطي السعة يعني الحجم .

$$v = \pi r^2 h \qquad 125\pi = \pi r^2 h \qquad r^2 h = 125 \qquad h = \frac{125}{r^2} \quad ---2$$

التعويض:- صار متغير واحد $A = 2\pi r.\frac{125}{r^2} + .\pi r^2 = \frac{250\pi}{r} + \pi r^2 = 250\pi r^{-1} + \pi r^2$

الاشتقاق:-

٢٠١٦د١

$$\frac{dA}{dr} = -250\pi r^{-2} + 2\pi r$$

عند النهايات:- $\frac{dA}{dr} = 0$

$$-250\pi r^{-2} + 2\pi r = 0 \quad \div 2\pi$$

$$-125r^{-2} + r = 0$$

$$-\frac{125}{r^2} + r = 0 \quad \times r^2$$

$$r^3 = 125 \qquad r = 5\ cm$$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

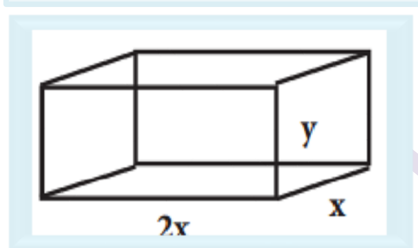
$$h = \frac{125}{r^2} = \frac{125}{25} = 5\ cm$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني ابعاد الاسطوانة .

نصف القطر = r=5 cm الارتفاع = h=5 cm

مساحة الاسطوانة =محيط القاعدة .الارتفاع + 2 مساحة القاعدة .
بس هنا انا خليت 1 كدام مساحة القاعدة لان الحاوية مفتوحة من الاعلى .

خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ cm^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علما ان الخزان ذو غطاء كامل .



الفرضية :- حجم متوازي سطوح =v العرض =x الطول =2x

الارتفاع =y

(العلاقة الرئيسية اكبر حجم لمتوازي السطوح =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $V = x.2x.y = 2x^2y \quad ---1$

العلاقة الثانوية :- هنا منطي المساحة .

$$A = 2(x + 2x)y + 2x.2x = 6xy + 4x^2 \qquad 108 = 6xy + 4x^2 \quad \div 2$$

$$3xy + 2x^2 = 54 \qquad 3xy = 54 - 2x^2 \qquad y = \frac{54 - 2x^2}{3x}$$

٢٠٠٠-٢٠٠٢-٢٠١٣

التعويض :- صار متغير واحد $V = 2x^2y = 2x^2\frac{54-2x^2}{3x} = \frac{1}{3}(108x - 4x^3)$

الاشتقاق :-

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{3}(108 - 12x^2)$$

عند النهايات:- $\frac{dv}{dx} = 0$

$$\frac{1}{3}(108 - 12x^2) = 0 \qquad 36 - 4x^2 = 0 \quad \div 4 \qquad x^2 = 9 \qquad x = 3\ cm$$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$y = \frac{54 - 2.9}{3.3} = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9} = 4cm$$

المطلوب :- تلكاه بعد كلمة جد . وهنا بهذا السؤال المطلوب مني ابعاد متوازي السطوح .

العرض x=3 cm الطول 2x=2.3=6 cm الارتفاع y=4 cm

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي 60cm اثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر ما يمكن فان طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

٢٠١٣-٢٠١٥

الفرضية :- مساحة الدائرة =A1 مساحة المربع =A2

نصف قطر الدائرة =r وطول ضلع المربع =x

المحيط للدائرة =P1 ومحيط المربع =P2

(العلاقة الرئيسية مجموع المساحتين =اصغر ما يمكن)

العلاقة :- $At = A1 + A2 = \pi r^2 + x^2 \quad --1$

العلاقة الثانوية :- مجموع محيطي الشكلين .

$pt = p1 + p2 \qquad 2\pi r + 4x = 60 \quad \div 2 \qquad 2x = 30 - \pi r \quad \div 2$

$x = 15 - \frac{\pi}{2} r \quad ----2$

التعويض :- صار متغير واحد $A = \pi r^2 + \left(15 - \frac{\pi}{2} r\right)^2$

الاشتقاق :- $\frac{dA}{dr} = 2\pi r + 2\left(15 - \frac{\pi}{2} r\right) \times -\frac{\pi}{2} = 2\pi r - 15\pi + \frac{\pi^2}{2} r$

عند النهايات :- $\frac{dA}{dr} = 0$

$2\pi r - 15\pi + \frac{\pi^2}{2} r = 0 \quad \div \pi$

$2r - 15 + \frac{\pi}{2} r = 0 \quad \times 2 \qquad 4r + \pi r = 30 \qquad r(\pi + 4) = 30$

$r = \frac{30}{\pi + 4} \ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$$x = 15 - \frac{\pi}{2} \frac{30}{\pi + 4} = 15 - \frac{15\pi}{\pi + 4} = \frac{15\pi + 60 - 15\pi}{\pi + 4} = \frac{60}{\pi + 4} \quad 5\ cm$$

المطلوب :- اثبات ان القطر للدائرة = طول ضلع المربع .

نجد قطر الدائرية =$2r$

$$2r = 2.\frac{30}{\pi + 4} = \frac{60}{\pi + 4} \ cm$$

الحالة الخامسة والأخيرة

- كل منحني دالة –قطع مخروطي تعطى معادلته بالسؤال فانها تمثل علاقة ثانوية .
- اذا طلب نقطة تقع ع منحني فان العلاقة الرئيسية هي البعد بين نقطتين .
- اذا شكل (مربع مستطيل الخ) داخل منحني دالة فان المنحني علاقة ثانوية.لكن بالبداية نحاول نسوي جدول ونفرض قيم لـx ونجد قيم y ونرسم المنحني حتى نعرف شلون المستطيل يرسم داخل المنحني

مثال جد نقطة او نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون اقرب ما يمكن للنقطة (0.4)

٢٠١١-٢٠١٢-٢٠١٣-٢٠١٥-٢٠١٦

الفرضية :- نفرض النقطة $M(x.y)$

(العلاقة الرئيسية اقرب بعد =اقرب ما يمكن)

العلاقة :- $s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} \quad --1$

العلاقة الثانوية :- اذا منطيك معادلة منحني بالسؤال

$y^2 - x^2 = 3 \qquad x^2 = y^2 - 3 \qquad ---2$

التعويض :- $s = \sqrt{y^2 - 3 + (y-4)^2}$

نبسطها .

$s = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$

الاشتقاق :-

$$\frac{ds}{dy} = \frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}}$$

عند النهايات :- $\frac{ds}{dy} = 0$

$\frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} = 0$ وسطين في طرفين $4y - 8 = 0 \quad \div 4$

$y - 2 = 0 \qquad y = 2$

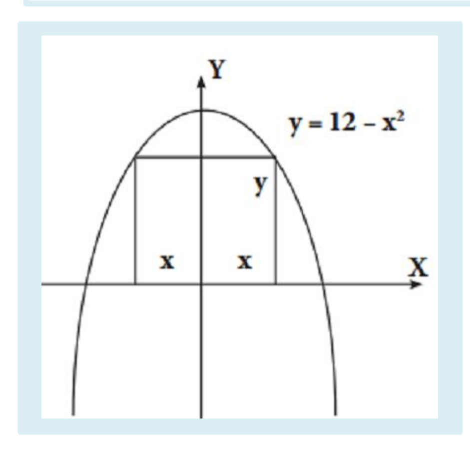
نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$x^2 = y^2 - 3 \qquad x^2 = 4 - 3 = 1 \qquad x = \mp 1$

المطلوب :- النقاط

$M(1.2) \quad M(-1.2)$

تمارين : جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = y = 12 - x^2$ ومحور السينات .راسان من رؤوسه على المنحني والراسان الاخران على محور السينات .ثم جد محيطه .



الفرضية :- مساحة المستطيل =A الطول $= 2x$ والعرض =y

(العلاقة الرئيسية اكبر مساحة للمستطيل =اكبر ما يمكن)

العلاقة :- $A = 2x.y$

العلاقة الثانوية :- دالة بالسؤال نعتبرها هي العلاقة الثانوية .

$$f(x) = y = 12 - x^2$$

التعويض :- $A = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$

الاشتقاق :-

$$\frac{dA}{dx} = 24 - 6x^2$$

٢٠٠٧-٢٠١٢

عند النهايات:- $\frac{dA}{dx} = 0$

$24 - 6x^2 = 0 \qquad \div 6 \qquad 4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4 \qquad x = 2\ cm$

نعوض في معادلة 2 دائما حتى نطلع المجهول الثاني .

$y = 12 - 4 = 8\ cm$

المطلوب :- الابعاد

طول المستطيل = $2x=4\ cm$ العرض= cm $y=8$

ثم نجد المحيط

$$p = 2(2x + y) = 24cm$$

أ. امجد سلمان –ميسان–العمارة تم في الجمعة ٢٠١٩-٢-١



الفصل الرابع
التكامل
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
اعداد الأستاذ
م. أمجد سلمان

الفصل الرابع – التكامل

يأتي عليه وزاريا ٣٠ درجة

٣ أفرع متفرقة على الأسئلة.

١- الدالة المقابلة أهميتها وزاريا ٢٠%
٢- طرق التكامل اهميتها ١٠٠% يأتي سؤال من ١٠ درجات عنه. وتعتبر أساس التكامل كله.
- ❖ تكامل الدوال الجبرية
- ❖ تكامل الدوال المثلثية
- ❖ مشتقة وتكامل دالة اللوغاريتم
- ❖ مشتقة وتكامل الدالة الاسية
- ❖ مشتقة الدالة الاسية الثابتة.

٣- التكامل المحدد أهميته ١٠٠% نفس السؤال الأعلى لكن يضاف له حدود التكامل...
٤- تكامل القيمة المطلقة والدالة الشطرية اهميته ٤٠%
٥- تمارين (٥-٤) أهميتها ٥٠% وزاريا
٦- المساحة تحت المنحني والمنحنيين للدوال العادية والمثلثية أهميته ٨٠%
٧- المسائل الفيزيائية أهميته ٥٠%
٨- الحجوم أهميتها ٨٠%

تابعونا على قناتنا الخاصة

@xymath

@Amjed2017

MOB: - 07730553030

التكامل غير المحدد

$$\int \text{رقم}\ dx = \text{رقم}\ x + c$$

C ثابت اعتباطي وdx تعني ان المتغير هو x وغيره يعتبر ثابت مهما كان حتى لو كان y,z,r (طبعا بشرط انو هاي الثوابت لا تمثل دالة للx) الخ .

$$\int 4\ dx = 4x + c$$

$$\int -6\ dx = -6x + c$$

$$\int \frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{2}x + c$$

$$\int \sqrt{5}\ dy = \sqrt{5}y + c$$

$$\int \sqrt{z-7}\ dy = \sqrt{z-7}y + c$$

$$\int \sqrt{x^2+x+1}\ dy = \sqrt{x^2+x+1}y + c$$

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

الاس نزوده واحد ونضرب بمقلوب الاس شكد ما يصير.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + c$$

$$\int x^{-9} dx = \frac{1}{-8}x^{-8} + c = -\frac{1}{8}x^{-8} + c$$

<u>اذا</u> x موجودة بالمقام نصعدها للبسط وبعدين نكاملها وبعد التكامل تريد تعوفها فوك تريد ترجعها لمكانها .

$$\int \frac{dx}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{1}x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{-6}} dx = \int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + c$$

$$\int \frac{dx}{x^9} dx = \int x^{-9} dx = -\frac{1}{8}x^{-8} + c$$

<u>اذا</u>
الاس كسر نستخدم طريقة سريعة

$$\int x^{\frac{\text{الاس}}{\text{الدليل}}} dx = \frac{\text{مقام}}{\text{بسط} + \text{مقام}} x^{\frac{\text{بسط+مقام}}{\text{مقام}}} + c$$

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$\int x^{\frac{-4}{3}} dx = \frac{3}{-4+3}x^{\frac{-4+3}{3}} + c = -3x^{\frac{-1}{3}} + c$$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} dx = \int x^{\frac{-4}{5}} dx = \frac{5}{1}x^{\frac{1}{5}} + c = 5x^{\frac{1}{5}} + c$$

$$\int x^{\frac{9}{11}} dx = \frac{11}{20}x^{\frac{20}{11}} + c = -3x^{\frac{-1}{3}} + c$$

بالبداية ضيف للاس وشكد ما يصير وبعدين الناتج خليه كدام x بس اعكسه (اقلبه)

$$\int x^{\frac{5}{3}} dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + c$$

من هسه خل نتفق على انو احنا ما نكدر نكامل اي جذر الا نحوله الى أصله حسب قاعدة

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$$

وبعدين نجري التكامل حسب القاعدة الفوك مالت الاس كسر.

$$\int \sqrt[3]{x^7} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + c$$

<u>اذا الجذر بالمقام يرفع الى البسط وبعدين نكامله.</u>

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^9}} dx = \int x^{\frac{-9}{4}} dx = \frac{-4}{5}x^{\frac{-5}{4}} + c$$

يعني نكامل x حسب القديم ومقلوب الاس ينضرب بالرقم الي كدامها. وهايهيه .

$$\int a\,x^n dx = a.\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

$$\int 3x^6dx = 3.\frac{1}{7}x^7 + c = \frac{3}{7}x^7 + c$$

$$\int -9x^2dx = -9.\frac{1}{3}x^3 + c = -3x^3 + c$$

$$\int \frac{7}{x^2}dx = \int 7x^{-2} + c = \frac{7}{-1}x^{-1} + c = -7x^{-1} + c = \frac{-7}{x} + c$$

$$\int \frac{x}{4}dx = \int \frac{1}{4}x\,dx = \frac{1}{4}\ .\frac{1}{2}x^2 + c = \frac{1}{8}x^2 + c$$

$$\int \sqrt{\frac{5}{x}}dx = \int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \sqrt{5}\ \ \frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}} + c$$

بالمناسبة تكدر تطلع الرقم خارج التكامل وبعدين تكامل المقدار الي يبقى داخل التكامل.

$$\int \sqrt[3]{27\,x}dx = \int 3\,x^{\frac{1}{3}}dx = 3\ \ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + c$$

معضلة التكامل

- هي انه يتوزع على الجمع والطرح ولا يتوزع على الضرب ولا القسمة

$$\int f_1 \pm f_2 \pm f_3 = \int f_1 \pm \int f_2 \pm \int f_3$$

- اما الضرب فتعتبر كارثة كبيرة اذا قمت بتوزيع التكامل على المقادير المضروبة.ويجب التخلص من عمليات الضرب ومن القوس المرفوع لاس بطرق خاصة نناقشها فيما بعد

$$\int f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \neq \int f_1 \cdot \int f_2 \cdot \int f_3$$

- ولا يجوز توزيع التكامل على البسط والمقام ابدا بل يجب إيجاد طرق للتخلص من المقام

$$\int \frac{f_1}{f_2} \neq \frac{\int f_1}{\int f_2}$$

٤-تكامل مجموع وطرح عدة دوال: - نكامل كل دالة لوحدها بشرط نتخلص من الكسر ومن الجذر ثم نكامل حد حد.

$$\int x^2-6x^{-5}+5x^7-\frac{4}{3}x^{-2}+x^{\frac{6}{7}}-\frac{7}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{\frac{9}{x^9}}+4x+7\ \ dx$$

ما يصير نكامل الا لما نتخلص من الكسر والجذر بحيث تصير الدالة خطية يالله نكامل.

$$\int x^2-6x^{-5}+5x^7-\frac{4}{3}x^{-2}+x^{\frac{6}{7}}-7\,x^{-\frac{1}{3}}-3\,x^{-\frac{1}{2}}+4x+7\ \ dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{6}{4}x^{-4}+\frac{5}{8}x^8-\frac{4}{3}.\frac{1}{-1}x^{-1}+\frac{13}{7}x^{\frac{7}{13}}-3\times\frac{-3}{2}x^{\frac{-3}{2}}+\frac{-3}{2}x^2+7x+c$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^{-4}+\frac{5}{8}x^8+\frac{4}{3}x^{-1}+\frac{13}{7}x^{\frac{7}{13}}+\frac{9}{2}x^{\frac{-3}{2}}-\frac{3}{2}x^2+7x+c$$

$$\int x^9-4x^5-3x-6\ \ dx=\frac{1}{10}x^{10}-\frac{4}{6}x^6-\frac{3}{2}x^2-6x+c=\frac{x^{10}}{10}-\frac{2}{3}x^6-\frac{3}{2}x^2-6x+c$$

تكامل الدوال الجبرية

كل التكاملات تخضع الى قانونين ولا يوجد لدينا طريق غيرهما لأجراء التكامل اسميهما ركني التكامل

الركن الأول

شوكت اكامل كل حد لوحده

١-ضرب اقواس

$$\int (x+2)(x^2+x)\ dx$$

لا نستطيع اجراء التكامل لوجود عملية ضرب. نتخلص من الضرب ثم نكامل كل حد لوحده.

٢-قوس مرفوع لاس صحيح موجب

$$\int (x^2+2)^2\ dx$$

مانكدر نكامل بسبب وجود الاس لازم نفتح مربع حدانية

٣-اذا كان الاس كسر او سالب

$$\int (x^2+2)^{-2}\ dx$$

ما نكدر نكامل بهذا الركن لان الاس ما ينفتح لذلك نروح الى الركن الثاني

٣-وجود قسمة بحيث المقام حد واحد والبسط مو قوس مرفوع لاس. لذلك نوزع المقام ع حدود البسط ثم نكامل.

$$\int \frac{x^3+3}{x^3}\ dx$$

٤-اذا كان المقام خال من الاس وحللنا واختصرنا

$$\int \frac{x^3+27}{x+3}\ dx$$

بعد الاختصار تصبح حدوديات بلا قوس نكامل كل حد لوحده.

٥-بعض الأسئلة نكدر نطبق عليها الركنين معا يعني نكدر نوفر المشتقة ونكامل حسب الركن الثاني ونكدر نتخلص من الاس ونكامل حدوديات حسب هذا الركن. مثال

$$\int (x^2+2)^2\ 2x\ dx$$

الركن الثاني

شوكت اكامل بطريقة القوس ومشتقته

امثلة

١-قوس مرفوع لاي اس بشرط وجود مشتقته

$$\int (x^2+4)^3\ 2x dx$$

لاحظ ان مشتقة داخل القوس موجودة

٢-قوس مرفوع لاس صحيح سالب او كسر هذا مستحيل ينفتح وينحل بالركن الأول لذلك هنا نحله

$$\int (5x+2)^{-2}\ dx$$

$$\int (5x+2)^{\frac{2}{3}}\ dx$$

بشرط عدم وجود اختصار بين داخل القوس ومقام الجذر

٣-تكامل أي جذر بشرط ماكو اختصار بين داخل الجذر والجذر بحيث بهيج حالة ينحل بالركن الاول

$$\int \sqrt{6x+8}\ dx$$

٤- قسمة دالتين والمقام جذر على دالة *وليس المقام حد واحد او يمكن اختصاره*

حيث يرفع الى البسط ويصبح المقام قوس والبسط مشتقته

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+7}}\ dx$$

وسوف نغوص بالتفاصيل لهذا الركن في القاعدة الخامسة للتكامل في الصفحة اللاحقة لاحظها واقراءها بتمعن لانها اهم قاعدة في التكامل .

$$\int (\text{دالة معينة})^{n} \times \text{مشتقة الدالة ما بيها نقص}\ dx = \text{مقلوب الاس}\ (\text{نفس الدالة})^{\text{الاس}+1} + c$$

شوكت نستخدم هذا القانون؟

- إذا لكينا دالة مرفوعة لاس وخارجها مشتقتها.
- لكينا دالة داخل جذر نتخلص من الجذر وراح يتحول ايضا لدالة مرفوعة لاس.

شلون استخدمها؟

- لازم تشتق الدالة الي داخل القوس على جهة وتشوف الي منطيها بالسؤال تطابق المشتقة الي انت طلعتها لو لا.
- اذا المشتقة الي موجودة بيها نقص رقم. نضع الرقم للمشتقة وخارج التكامل نضع مقلوبه. ثم نكامل.
- اذا اكو رقم زيادة نقسمه عليه للتخلص منه .
- اذا نقص متغير مثل x او اي شيء غير الرقم. فتسوي كارثة اذا خليت x. وديربالك تطلع متغير خارج التكامل. والتكامل يكون بطرق رياضية اخرى.
- اذا توفر كلشي احذف dx والمشتقة وضيف للاس واحد ونزل الدالة نفسها واضرب بمقلوب الاس الجديد.

$$1)\ \int (x^2+3)^2\, 2x\, dx$$

لدينا قوس مرفوع لاس نحتاج لمشتقة داخل القوس حتى نكدر نكامل. وهي موجودة كاملة لذلك سوف نكامل

$$\int (x^2+3)^2 \underbrace{2x}_{\text{المشتقة}} dx = \frac{1}{3}(x^2+3)^3 + c$$

$$2)\ \int \sqrt[4]{(1-3x)^3}\ dx = \int (1-3x)^{\frac{3}{4}}\ dx$$

لدينا قوس مرفوع لاس نحتاج لمشتقة داخل القوس التي هي فقط (3-) وهي غير موجودة. اذن نضع 3- ونضرب بمقلوب الرقم خارج التكامل.

$$= -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{3}{4}} \underbrace{-3}_{\text{المشتقة}}\ dx = -\frac{1}{3} \times \frac{4}{7}(1-3x)^{\frac{7}{4}} + c = -\frac{4}{21}(1-3x)^{\frac{7}{4}} + c$$

$$3)\ \int (3x^2+8x+5)^6\,(3x+4)\ \ dx$$

المشتقة لداخل القوس =6x+8 الموجود لدينا =3x+4 غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة بحيث لو ضربناها ب2 راح تصير مطابقة. نضع 2 ونضرب بمقلوبه وبعدين نكامل.

$$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 \underbrace{2(3x+4)dx}_{\text{المشتقة}} = \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6 \underbrace{(6x+8)dx}_{\text{المشتقة}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}(3x^2+8x+5)^7 + c$$

$$= \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7 + c$$

$4)\ \int x\sqrt[3]{3x^2+1}\ dx = \int (3x^2+1)^{\frac{1}{3}}\ \underbrace{xdx}_{\text{المشتقة}}$

المشتقة لداخل القوس= 6x الموجود لدينا =x غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة بحيث لو ضربناها ب6 راح تصير مطابقة. نضع 6 ونضرب بمقلوبه وبعدين نكامل.

$= \frac{1}{6}\int (3x^2+1)^{\frac{1}{3}}\ 6xdx = \frac{1}{6}\times\frac{4}{3}(3x^2+1)^{\frac{4}{3}} + c = \frac{2}{9}(3x^2+1)^{\frac{4}{3}} + c$

$5)\ \int x\sqrt{x^2+9}\ dx = \int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\ \underbrace{xdx}_{\text{المشتقة}}$

المشتقة لداخل القوس= 2x الموجود لدينا =x غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة بحيث لو ضربناها ب2 راح تصير مطابقة. نضع 2 ونضرب بمقلوبه وبعدين نكامل.

$= \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\ \underbrace{2xdx}_{\text{المشتقة}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c$

$6)\ \int \sqrt[2]{x^2-9}\ 7xdx = \int (x^2-9)^{\frac{1}{2}}\ \underbrace{7xdx}_{\text{المشتقة}}$

المشتقة لداخل القوس= 2x الموجود لدينا =7x غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة هو 2 ويوجد زيادة همينا هي 7 نطلع 7 بره ونضرب الداخل ب2 بحيث راح تصير مطابقة ونضرب الخارج بمقلوب 2 وبعدين نكامل.

$= \frac{7}{2}\int \underbrace{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}_{\text{القوس}}\ \underbrace{2x}_{\text{المشتقة}}\ dx = \frac{7}{2}\,\frac{2}{3}\underbrace{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}_{\text{كاملا}} + c = \frac{7}{3}(x^2-9)^{\frac{3}{2}} + c$

$7)\ \int \sqrt[4]{3x^2-2x+4}\ (15x-5)\ dx = \int (3x^2-2x+4)^{\frac{1}{4}}\ \underbrace{(15x-5)dx}_{\text{المشتقة}}$

المشتقة لداخل القوس= $6x-2$ الموجود لدينا= $15x-5$ غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة.

اذا اخذت عامل مشترك من الموجودة هو (5) وبعدين طلعته بره لان هو زيادة وضربت الباقي ب(2) تطلع مطابقة.

$= \int \underbrace{(3x^2-2x+4)^{\frac{1}{4}}}_{\text{القوس}}\ \underbrace{5(3x-1)}_{\text{المشتقة}}\ dx = \frac{5}{2}\int \underbrace{(3x^2-2x+4)^{\frac{1}{4}}}_{\text{القوس}}\ \underbrace{2(3x-1)}_{\text{المشتقة}}\ dx$

$= \frac{5}{2}\int \underbrace{(3x^2-2x+4)^{\frac{1}{4}}}_{\text{القوس}}\ \underbrace{(6x-2)}_{\text{المشتقة}}\ dx$

$= \frac{5}{2}\,\frac{4}{5}(3x^2-2x+4)^{\frac{5}{4}} + c = 2(3x^2-2x+4)^{\frac{5}{4}} + c$

خطوات التفكير بأسئلة القوس المرفوع لاس

- توفير مشتقة داخل القوس
- عامل مشترك
- حصر المقادير بنفس الاس
- فتح مربع حدانية
- ضرب الاقواس

$$8)\int \sqrt[3]{x^2-2x+5}\;(1-x)\,dx = \int (x^2-2x+5)^{\frac{1}{3}}\;\underbrace{(1-x)dx}_{\text{المشتقة}}$$

المشتقة لداخل القوس= $2x-2$ الموجود لدينا= $1-x$ غير مطابق . يوجد نقص بالموجود. لازم نقلبها و نضرب ب(2-) حتى هم نقلب المشتقة الموجودة وهم راح تصير مطابقة .

$$= -\frac{1}{2}\int \underbrace{(x^2-2x+5)^{\frac{1}{3}}}_{\text{القوس}} \times \underbrace{-2(1-x)}_{\text{المشتقة}}\;dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{(x^2-2x+5)^{\frac{1}{3}}}_{\text{القوس}}\;\underbrace{(2x-2)}_{\text{المشتقة}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}(x^2-2x+5)^{\frac{4}{3}}+c = -\frac{3}{8}(x^2-2x+5)^{\frac{4}{3}}+c$$

$$9)\int x^{-3}\left(13-\frac{5}{x^2}\right)^8\;dx = \text{نرتبها} = \int (13-5x^{-2})^8\;\;x^{-3}\;dx$$

المشتقة لداخل القوس= $+10x^{-3}$ الموجود لدينا= x^{-3} غير مطابق. نحتاج الى 10 وخارج التكامل نضرب بمقلوبها .

$$= \frac{1}{10}\int \underbrace{(13-5x^{-2})^8}_{\text{القوس}} \times \underbrace{10x^{-3}}_{\text{المشتقة}}\;dx = \frac{1}{10}\,\frac{1}{9}(13-5x^{-2})^9+c = \frac{1}{90}(13-5x^{-2})^9+c$$

اسئلة فيكات وكذا مثل المشتقة ما موجودة او مدمجة مع القوس.

١-إذا انطى جذر وادخله اس x مساوي للدليل او أكبر منه. او عامل مشترك ووزعنا الاس عليه ونطلعها خارج الجذر ويصير مشتقة.

$$10)\int \sqrt[3]{x^5-2x^3}\;\;dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2-2)}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3}\;\;\sqrt[3]{x^2-2}\,dx = \int x\;\;\sqrt[3]{x^2-2}\,dx$$

$$= \int \underbrace{(x^2-2)^{\frac{1}{3}}}_{\text{القوس}} \times \underbrace{x}_{\text{المشتقة}}\;\;dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(x^2-2)^{\frac{1}{3}}}_{\text{القوس}} \times \underbrace{2x}_{\text{المشتقة}}\;\;dx = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}(x^2-2)^{\frac{4}{3}}+c = \frac{3}{8}(x^2-2)^{\frac{4}{3}}+c$$

المشتقة لداخل القوس= $2x$ الموجود لدينا= x غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة هو 2 لذلك ضربت ب2 بحيث راح تصير مطابقة ونضرب الخارج بمقلوب2 وبعدين نكامل.

$$11)\int (6x+15)\;\;\sqrt{2x+5}\,dx$$

الفكرة اذا اخذنا عامل مشترك من القوس الاول . راح يطلع يشبه داخل الجذر وعند الضرب تجمع الاسس .

$$= \int 3(2x+5)\;\;(2x+5)^{\frac{1}{2}}dx = 3\int (2x+5)^{1+\frac{1}{2}}dx = 3\int (2x+5)^{\frac{3}{2}}dx$$

المشتقة لداخل القوس= $+2$ الموجود لدينا= 1 غير مطابق. نحتاج الى 2 وخارج التكامل نضرب بمقلوبها .

$$= \frac{3}{2}\int \underbrace{(2x+5)^{\frac{3}{2}}}_{\text{القوس}} \times \underbrace{2}_{\text{المشتقة}}\;\;dx = \frac{3}{2}\;\frac{2}{5}(2x+5)^{\frac{5}{2}}+c = -\frac{3}{5}(2x+5)^{\frac{3}{2}}+c$$

٢-اذا كان داخل الاس او الجذر مربع حدانية نرجعه الى اصله ثم نكامله. بس هنا. المقدار$\mp = \sqrt{(\text{مقدار})^2}$

$$12)\int \sqrt[2]{x^2-4x+4}\quad dx$$

$$=\int \sqrt{(x-2)(x-2)}\,dx=\int \sqrt{(x-2)^2}\,dx=\mp\int x-2\,dx\ =\mp(\frac{x^2}{2}-2x)+c$$

$$13)\int x^2(x^6-6x^3+9)^8\ \ dx=\text{نرتبها}=\int\left((x^3-3)(x^3-3)\right)^8\ \ x^2\ dx=\int[(x^3-3)^2]^8\ \ x^2dx$$

$$=\int(x^3-3)^{16}\quad x^2dx$$

المشتقة لداخل القوس=$+3x^2$ الموجود لدينا=x^2 غير مطابق. نحتاج الى 3 وخارج التكامل نضرب بمقلوبها .

$$=\frac{1}{3}\int\underbrace{(x^3-3)^{16}}_{\text{القوس}}\times\underbrace{3\,x^2}_{\text{المشتقة}}\,dx=\frac{1}{3}\frac{1}{17}(x^3-3)^{17}+c=\frac{1}{51}(x^3-3)^{17}+c$$

٣-إذا كان لدينا مقدار مرفوع لاس ومضروب بـx لنفس الاس. نضمهم كلهم بنفس الاس ونضربهم.او سحبنا من x^n بحيث تتوفر المشتقة.

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)^4\ x^4\ \ dx=\text{نضمهم لنفس الاس}$$

$$=\int\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)x\right]^4\ \ dx=\int[1+x]^4\quad 1\,dx=\text{نكامل}=\frac{1}{5}(x+1)^5+c$$

$$\int(1-x^2)^2\,(1+x^2)^2\ \ x^3\,dx=\text{نحصرهم}=\int[(1-x^2)(1+x^2)]^2\,x^3dx=\int[1-x^4]^2x^3\ dx$$

المشتقة لداخل القوس=$-4x^3$ الموجود لدينا=x^3 غير مطابق. نحتاج الى -4 وخارج التكامل نضرب بمقلوبها .

$$=-\frac{1}{4}\int\underbrace{[1-x^4]^2}_{\text{القوس}}\times\underbrace{-4x^3}_{\text{المشتقة}}\ dx=-\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}[1-x^4]^3+c=-\frac{1}{12}[1-x^4]^3+c$$

٤-يصير ندخل مقدارع جذر بس بشرط ان يرفع المقدار لنفس درجة الاس.

$$\int\sqrt[7]{\frac{3}{x^7}-\frac{5}{x^6}}\ \ x\ dx=\int\sqrt[7]{\frac{3}{x^7}-\frac{5}{x^6}}\ \ \sqrt[7]{x^7}\ dx=\text{نضمهم}=\int\sqrt[7]{x^7(\frac{3}{x^7}-\frac{5}{x^6})}\quad dx=\text{ندخل على القوس}$$

$$=\int\sqrt[7]{3-5x}\quad dx=\int\underbrace{(3-5x)^{\frac{1}{7}}}_{\text{القوس}}\ dx$$

المشتقة لداخل القوس=-5 الموجود لدينا =1 غير مطابق. نحتاج الى -5 وخارج التكامل نضرب بمقلوبها .

$$= -\frac{1}{5}\int \underbrace{(3-5x)^{\frac{1}{7}}}_{\text{القوس}} \times \underbrace{-5}_{\text{المشتقة}}\ dx = -\frac{1}{5} \times \frac{7}{8}(3-5x)^{\frac{8}{7}} + c = -\frac{7}{40}(3-5x)^{\frac{8}{7}} + c$$

ملاحظة جوهرية.

بالنسبة للمشتقة تحتاج مرات رقم نقص فمسموح تعوض رقم. ومرات تلكه رقم زيادة مسموح تطكله سفن وتطلعه خارج التكامل وبعدين تكمل خطواتك. بس مالت x نقص او زيادة وتعوض او تطلعها بره التكامل هاي كارثة تسويها. لا يجوز ضرب التكامل بمتغير او اخراجه منه.

طريقة حل أي سؤال لدالة مرفوعة لاس هي

توفير مشتقة داخل القوس اذا لم تنجح عامل مشترك اذا لم ينجح تحليل تجربة اذا لم ينجح حصر الاقواس اذا لم ينجح فتح الاقواس بمربع حدانية او ضرب الاقواس وهي القاعدة التالية

ضرب دالتين

اغلب اسئلتها تشتغل على الركن الاول بعد فتح الاقواس

- **اذا لكينا قوس دالة مرفوعة لاس (شرط الاس عدد صحيح موجب) وخارج القوس يوجد مقدار وحاولنا بيه وما صار مشتقة او ماكو مقدار نكدر نحوله مشتقة. الحل هنا نفتح الاقواس مربع حدانية ونضرب المقادير ونكامل.**
- **اذا لكينا قوس بقوس بينهم ضرب ولا يمثل احدهم مشتقة للأخر. نضرب الاقواس ثم نكامل.**

$$\int x^2(4x - x^2)^2\ dx$$

هسه مشتقة داخل القوس 4-2x= والي موجود خارج القوس لا يمثل مشتقة ابدا. ومستحيل نكدر نحور بيها وتصير مشتقة. وما دام الاس عدد طبيعي. نفتح مربع حدانية. (تأكد بنفسك كل الطرق ما تصير لذلك نفتح مربع حدانية).

$$= \int x^2(16x^2 - 8x^3 + x^4)\ dx = \int 16x^4 - 8x^5 + x^6\ dx = \frac{16}{5}x^5 - \frac{8}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + c$$

$$= \frac{16}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + c$$

$\int \sqrt{x}(x+6)\ dx =$ (نفتح الاقواس (عند الضرب تجمع الاسس

$$= \int x^{\frac{1}{2}}(x+6)\ dx = \int x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$\int \sqrt{x}(4x-5)^2\ dx =$ نفتح الاس $= \int \sqrt{x}\,(16x^2 - 40x + 25)dx =$ عند الضرب تجمع الاسس

$$= \int 16x^2\, x^{\frac{1}{2}} - 40x x^{\frac{1}{2}} + 25x^{\frac{1}{2}}\ dx = \int 16\, x^{\frac{5}{2}} - 40x^{\frac{3}{2}} + 25x^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= 16\,.\frac{2}{7}\, x^{\frac{7}{2}} - 40\ \frac{2}{7}\ x^{\frac{5}{2}} + 25.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{32}{7}\ x^{\frac{7}{2}} - \ \frac{80}{7}\ x^{\frac{5}{2}} + \frac{50}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$\int (x^2+2x)(x-4)\ dx =$ ضرب الاقواس

$$= \int x^3 - 4x + 2x^2 - 8x\, dx = \int x^3 + 2x^2 - 12x\ dx = \text{نكامل} = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + c$$

$$\int (3x^2+1)^2\ dx = \int 9x^4 + 6x^2 + 1\, dx = \frac{9}{5}x^5 + \frac{6}{3}x^3 + x + c$$

تكامل قسمة دالتين

تروح للمقام تشوف شنو نوعه حتى تطبق عليه واحد من الحالات الثلاثة

إذا المقام حد واحد يرفع الى البسط وتغير اشارة الاس مالته ثم: - ✓ يتوزع ع حدود البسط. إذا كان البسط بدون اس. ثم نكامل بالركن الأول ✓ او يصير المقام مشتقة للبسط اذا كان البسط عليه اس.ونكامل بالركن الثاني	إذا كان المقام جذر او قوس مرفوع لأس ❖ يرفع الى البسط ويصير دالة مرفوعة لاس والبسط مشتقته ❖ بحيث $\int (\text{المقام})^n \times \text{البسط}\ dx$ القوس ، المشتقة	➢ اذا فشلت الاولى والثانية يعني المقام ومو حد واحد ولا جذر او قوس. ➢ هنا نحلل البسط والمقام او واحد منهم بطرق التحليل ➢ الاختصار ثم نكامل حسب القواعد السابقة.

تحليل فرق ومجموع مكعبين $a^3 \mp b^3 = (a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2)$

تحليل فرق مربعين $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

تحليل مجموع مربعين لا يحلل الا في الاعداد المركبة لذلك لا يتحلل هنا. $a^2 + b^2 \neq 0$

١-نبدا بحالة اذا كان المقام حد واحد نكدر نرفعه او نوزعه على حدود البسط اذا كان البسط بلا اس.

1) $\int \frac{(2x^2-3)^2 - 9}{x^2}\, dx$ نفتح مربع الحدانية و نوزع المقام

$$\int \frac{4x^4 - 12x^2 + 9 - 9}{x^2}\, dx = \int \frac{4x^4 - 12x^2}{x^2}\, dx = \int (4x^4 - 12x^2)x^{-2} dx$$

$$= \int 4x^2 - 12\ \ dx = \int 4x^2 - 12\ \ dx = \frac{4}{3}x^3 - 12x + c$$

$$2)\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx$$

المقام حد واحد بس البسط عليه اس جبير لذلك نرفع المقام ويصير مشتقة ونشوف شنو محتاجه المشتقة نوفرلها.

$$\int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{\sqrt{7}\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7 x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7 x^{-\frac{1}{2}}dx$$

مشتقة داخل القوس المفروض تكون $=\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$. والي موجود عندي بس $=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ لذلك نحتاج الى $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ نخلي بالمشتقة هذا المقدار ونضع مقلوبه خارج التكامل.

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{7}}\int \underbrace{\left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7}_{\text{القوس}} \times \underbrace{-\frac{\sqrt{5}}{2}x^{-\frac{1}{2}}}_{\text{المشتقة}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{35}}\frac{1}{8}\left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^8 + c$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{35}}\left(3-\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^8 + c$$

$$3)\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$$

مشتقة داخل القوس $=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ والي موجودة بالسؤال ولا يمها ولا نكدر نحور وتصير مثلها ابدا .

لو نباوع ع داخل الجذر اكو عامل مشترك نأخذه ونخرجه خارج الجذر ونضرب بالمقدار الموجود.

$$= \int \sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x}-\sqrt{x}}\;\; x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int \sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\;\; x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int \sqrt{\sqrt{x}}\;\sqrt{\sqrt{x}-1}\;\; x^{-\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \int \left[x^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\left[x^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int \left[x^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}}\;x^{-\frac{3}{4}}\;dx = \int \left[x^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1-3}{4}}\;dx$$

$$= \int \left[x^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-1}{2}}\;dx$$

هسه مشتقة داخل القوس $=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ والي موجودة $=x^{\frac{-1}{2}}$ نحتاج بس نصف .

$$= \frac{2}{1}\int \left[x^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\;dx = \text{هسه نكامل} = 2\;\;\frac{2}{3}\left[x^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{1}{2}}-1\right]^{\frac{3}{2}} + c$$

$4)\int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5}\,dx$

المقام حد واحد لذلك يتوزع على حدود البسط. بس الرقم الي بالمقام زيادة يطلع بره.

$$=\frac{1}{5}\int \frac{x^3-2x^2+1}{x^5}\,dx=\frac{1}{5}\int \frac{4x^3}{x^5}-\frac{2x^2}{x^5}+\frac{1}{x^5}\,dx=\frac{1}{5}\int \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}\,dx$$

$$=\frac{1}{5}\int 4x^{-2}-2x^{-3}+x^{-5}\,dx=\frac{1}{5}\left[\frac{4}{-1}x^{-1}-\frac{2}{-2}x^{-2}+\frac{1}{-4}x^{-4}\right]+c$$

$$=\frac{1}{5}\left[-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x^4}\right]+c$$

٢-هسه نبلش بالحالة الثانية اذا المقام جذر او قوس ينرفع الى البسط ثم نكمل باقي الخطوات حسب الركن الثاني

$1)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx$

يرفع الجذر كله الى البسط.

$$\int (x^3-5)^{\frac{-1}{2}}\quad x^2dx$$

المشتقة لداخل القوس= $3x^2$ الموجود لدينا = x^2 غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة بحيث لو ضربناها ب 3 راح تصير مطابقة. نضع 3 ونضرب بمقلوبه وبعدين نكامل.

$$=\frac{1}{3}\int (x^3-5)^{-\frac{1}{2}}\quad 3x^2dx=\frac{1}{3}\times\frac{2}{1}(x^3-5)^{\frac{1}{2}}+c=\frac{2}{3}\,(x^3-5)^{\frac{1}{2}}+c$$

$2)\int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}\,dx$

يرفع الجذر كله الى البسط

$$\int (x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}}\quad (x^2+2)\;dx$$

المشتقة لداخل القوس= $3x^2+6$ الموجود لدينا = x^2+2 غير مطابق. يوجد نقص بالموجودة بحيث لو ضربناها ب 3 راح تصير مطابقة. نضع 3 ونضرب بمقلوبه وبعدين نكامل.

$$=\frac{1}{3}\int (x^3+6x+1)^{-\frac{1}{3}}\quad (3x^2+6)dx$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}}+c=\frac{2}{9}\,(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}}+c$$

$$3)\int \frac{6-6x}{(x^2-2x)^2}dx = \int (x^2-2x)^{-2} \quad (6-6x)dx$$

البسط هو مشتقة . بيه 6 زيادة ومقلوب. ناخذ 6 عامل مشترك ونطلعها بره ونضرب ب2- حتى نوفر المشتقة وهمينا نقلب المقدار.

$$= \int (x^2-2x)^{-2} \; 6\,(1-x)dx = 6\frac{1}{-2}\int (x^2-2x)^{-2} \; -2\,(1-x)dx$$

$$= -3\int (x^2-2x)^{-2} \quad (2x-2)dx = -3 \; \frac{1}{-1}(x^2-2x)^{-1} + c = \frac{3}{x^2-2x} + c$$

$$4)\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^4-4x^2+4}} \; dx$$

يرفع الجذر كله الى البسط. وداخل الجذر يتحلل الى مربع حدانية.

$$= \int [(x^2-2)(x^2-2)]^{\frac{-1}{3}} \quad (2x^2) \; dx$$

$$= \int [(x^2-2)^2]^{\frac{-1}{3}} \quad (3x^2) \; dx == \int [x^2-2]^{\frac{-2}{3}} \quad (3x^2) \; dx$$

المشتقة لداخل القوس= $2x^2$ الموجود لدينا = x^2 غير مطابق . يوجد نقص بالموجودة بحيث لو ضربناها ب 2 راح تصير مطابقة .واكو زيادة هو الرقم 3 يخرج خارج التكامل .نضع 2 ونضرب بمقلوبه وبعدين نكامل .

$$= \frac{3}{2}\int [x^2-2]^{\frac{-2}{3}} \quad (2x^2) \; dx = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}(x^2-2)^{\frac{2}{3}} + c = \frac{9}{4}(x^2-2)^{\frac{1}{3}} + c$$

$$5)\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}} \; dx$$

يرفع الجذر كله الى البسط. وداخل الجذر يتحلل الى مربع حدانية.

$$= \int [(x+8)(x+8)]^{\frac{-1}{5}} \quad dx = \int [(x+8)^2]^{\frac{-1}{5}} \quad dx = \int [x+8]^{\frac{-2}{5}} \quad dx$$

المشتقة لداخل القوس= 1 الموجود لدينا =1 مطابق.

$$= \frac{5}{3}(x+2)^{\frac{3}{5}} + c$$

$$6)\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\,\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$

نبسط شوي وبعدين نرفع للبسط

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x}\ \ (3+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (3+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$$

مشتقة داخل القوس المفروض تكون = $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. والي موجود عندي بس = $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ لذلك نحتاج الى $\left(\frac{1}{2}\right)$ نخلي بالمشتقة هذا المقدار ونضع مقلوبه خارج التكامل .

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int (3+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = \sqrt{2}\ \frac{2}{1}(3+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{2}\ (3+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + c$$

$$8)\ \int \frac{3}{x^2-2x+1} dx$$

المقام مربع حدانية نرجعه لأصله ويرفع للبسط ايضا.

$$\int \frac{3}{(x-1)^2} dx \ = 3\int (x-1)^{-2}\ dx \ = \frac{3}{-1}(x-1)^{-1} + c = \frac{-3}{x-1} + c$$

$$8)\ \int \frac{dx}{x^2-14x+49}$$

المقام مربع حدانية نرجعه لأصله ويرفع للبسط ايضا.

$$\int \frac{1}{(x-7)^2} dx \ = \int (x-7)^{-2}\ dx \ = \frac{1}{-1}(x-7)^{-1} + c = \frac{-1}{x-7} + c$$

$$9)\ \int \frac{x}{(3x^2+5)^4} dx$$

$$= \int (3x^2+5)^{-4}\ x\ dx \ = \frac{1}{6} \int (3x^2+5)^{-4} \quad 6x\ dx$$

$$= \frac{1}{6}(\frac{1}{-3})(3x^2+5)^{-3} + c = \frac{-1}{18\ (3x^2+5)^3} + c$$

٣-هسه نبلش بالحالة الثالثة. اذا كان المقام لا جذر ولا قوس ولا حد واحد الحل يكون بالتحليل.

$$1)\ \int \frac{x^2-9}{x-3} dx$$

نحلل البسط فرق بين مربعين.

$$= \int \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\ dx = \text{بعد الاختصار} = \int x+3 \ \ dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + c$$

2) $\int \frac{x^4-16}{x-2}dx$

نحلل البسط فرق بين مربعين .بس هالمرة نحلل مرتين حتى يصير اختصار.

$= \int \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2}\ dx =$ ماكو الاختصار $= \int \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}\ dx$

$= \int (x+2)(x^2+4)\ \ dx =$ نضربهم

$= \int x^3+4x+2x^2+8\ dx$

$= \frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{2}{3}x^3+8x+c$

3) $\int \frac{x^3-27}{3x-9}dx$

البسط يتحلل فرق بين مكعبين والمقام عامل مشترك.

$= \int \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3(x-3)}\ dx =$ ماكو الاختصار $= \frac{1}{3}\int x^2+3x+9\ \ dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]+c$

---

4) $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$

البسط يتحلل فرق بين مكعبين والمقام عامل مشترك .

$= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\ dx =$ الاختصار $= \int x^2-x+1\ \ dx = \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+c$

---

5) $\int \frac{x^2-4x+3}{x-3}\ dx\ = \int \frac{(x-3)(x+1)}{x-3}\ dx\ = \int x+1\ dx = \frac{1}{2}x^2+x+c$

---

6) $\int \frac{x^5+x^2}{x^2-x+1}\ dx =$ الفوك عامل مشترك

$= \int \frac{x^2(x^3+1)}{x^2-x+1}\ dx\ = \int \frac{x^2(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\ dx = \int x^2(x+1)dx = \int x^3+x^2\ \ dx$

$= \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+c$

$7) \int \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}\,dx =$ الفوك تجربة

$= \int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int \sqrt{x}-2\;dx = \int x^{\frac{1}{2}}-2\;dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+c$

ملحوظة $x=\sqrt{x}.\sqrt{x}$

$2015 = 8) \int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}\;dx$

البسط عامل مشترك والمقام يصعد ويصير عند الضرب تجمع الاسس لان الاساسات متشابهة

$= \int [x-2]^{\frac{-1}{3}}\;3(x-2)\;dx = 3\int [x-2]^{\frac{-1}{3}}\;(x-2)\;dx =$ نجمع الاسس

$= 3\int [x-2]^{\frac{-1}{3}+1}\;dx = 3\int [x-2]^{\frac{2}{3}}\;dx = 3.\frac{3}{5}[x-2]^{\frac{5}{3}}+c = \frac{9}{5}[x-2]^{\frac{5}{3}}+c$

$9) \int \frac{x^3}{(x+1)^5}\,dx$

ملاحظة اذا كان اس المقام اكبر من البسط بأثنين نسحب اثنين من المقام ونعزلهم ع جهة ونحصر الباقي وراح يصير دالة ومشتقتها. باوع وياي .

$= \int \frac{x^3}{(x+1)^3}\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}_{\text{القوس}} \times \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\text{المشتقة}}\,dx$

مشتقة داخل القوس $= \frac{(x+1)\,(1)-x\,(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$ الموجودة لدينا مطابقة للمشتقة .يعني نكامل حسب الركن ٢ . وهلا بالخميس.

$\int \underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}_{\text{القوس}} \times \underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\text{المشتقة}}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^4+c$

$\int \frac{(x+x^2)^{10}}{x^{10}}\,dx = \int \left(\frac{x+x^2}{x}\right)^{10} dx = \int \left(\frac{x}{x}+\frac{x^2}{x}\right)^{10} dx = \int (1+x)^{10}dx = \frac{1}{11}(1+x)^{11}+c$

هنا الاس متساوي نحصرهم داخل اس واحد وبعدين نوزع الحد الواحد عليهم .

$10) \int \frac{x^7-64x}{x^5+4x^3+16x}\,dx = \int \frac{x(x^6-64)}{x(x^4+4x^2+16)}dx = \int \frac{(x^2-4)(x^4+4x^2+16)}{(x^4+4x^2+16)}dx = \frac{x^3}{3}-4x+c$

تكاملات الدوال المثلثية

القواعد العشرة

هذن الدوال العشرة ما تكامل بيهن الا بشروط
١-مامضروبات بدالة ثانية
٢-مامقسومات على دالة.
٣-اسهن =١
٤-مشتقة الزاوية موجودة كاملة.
عدا $csc^2\theta . sec^2\vartheta$ هذن حتى لو تربيع يتكاملن.
خوشن عرفت شلون؟؟؟؟

$$\int sin(\text{زاوية}) \quad (\text{مشتقة الزاوية})dx = -cos(\text{زاوية}) + c$$

$$\int cos(\text{زاوية}) \quad (\text{مشتقة الزاوية})dx = sin(\text{زاوية}) + c$$

$$\int sec^2(\text{زاوية}) \quad (\text{مشتقة الزاوية})dx = tan(\text{زاوية}) + c$$

$$\int csc^2(\text{زاوية}) \quad (\text{مشتقة الزاوية})dx = -cot(\text{زاوية}) + c$$

$$\int sec(\text{زاوية}) \quad tan(\text{زاوية}) \quad (\text{مشتقة الزاوية})dx = sec(\text{زاوية}) + c$$

$$\int csc(\text{زاوية}) \quad cot(\text{زاوية}) \quad (\text{مشتقة الزاوية})dx = -csc(\text{زاوية}) + c$$

$$\int tan(\text{زاوية})(\text{مشتقة الزاوية})dx = -ln|cos(\text{زاوية})| + c$$

$$\int cot(\text{زاوية})(\text{مشتقة الزاوية})dx = ln|sin(\text{زاوية})| + c$$

$$\int sec(\text{زاوية})(\text{مشتقة الزاوية})dx = ln|sec(\text{زاوية}) + tan(\text{زاوية})| + c$$

$$\int csc(\text{زاوية})(\text{مشتقة الزاوية})dx = -ln|csc(\text{زاوية}) + cot(\text{زاوية})| + c$$

هسه نبلش بالدوال الي اسها =1 لازم نطابقها وي القوانين الفوك ونكاملها .

1) $\int x + secx\ tanx\ dx$

هاي كلشي جاهز حتى مشتقة الزاوية =١ كبع واخذ شايف ألف خير.

$$= \frac{1}{2}x^2 + secx + c$$

---

2) $\int sin(2x+4)\ dx$

الاس=١مالت الدالة المثلثية يعني نحتاج مشتقة الزاوية بيها نقص=2 نضعها ونضع خارج التكامل مقلوبها ونكامل.

$$= \frac{1}{2}\int sin(2x+4) \quad 2dx$$

$$= -\frac{1}{2}cos(2x+4) + c$$

---

3) $\int cosx + x^{-2}\ dx$

هاي كلشي جاهز حتى مشتقة الزاوية =١ كبع واخذ شايف ألف خير.

$$= sinx + \frac{1}{-1}x^{-1} + c = sinx - \frac{1}{x} + c$$

---

4) $\int x^2\ sinx^3\ dx$

الاس=١مالت الدالة المثلثية يعني نحتاج مشتقة الزاوية بيها نقص=3 نضعها ونضع خارج التكامل مقلوبها ونكامل.

$$= \frac{1}{3}\int sinx^3 \quad 3x^2dx = -\frac{1}{3}cosx^3 + c$$

---

5) $\int 9\ sec\pi x\ tan\pi x\ dx$

عندي 9 زيادة وعندي نقص بمشتقة الزاوية الي هي (π) .نطلع الزيادة ونوفر المشتقة .

$$= \frac{9}{\pi}\int sec\pi x\ tan\pi x \quad \pi\ dx = \frac{9}{\pi}sec\pi x + c$$

6) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ = اسحب المقام

$= \int \cos\sqrt{1-x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) dx$

الاس=امالت الدالة المثلثية. اذن مشتقة الزاوية

$= \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

المشتقة الموجودة= $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ يوجد نقص= $\frac{-1}{2}$ نضعه ونضع خارج التكامل مقلوبها ونكامل.

$= -2\int \cos\sqrt{1-x}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right) dx$

$= -2\sin\sqrt{1-x} + c$

---

7) $\int \sec^2 4x\,dx$

رغم ان الاس تربيع الا ان sec من القواعد العشرة تتكامل مباشرة بس نحتاج مشتقة الزاوية =4

$= \frac{1}{4}\int \sec^2 4x \quad 4dx = \frac{1}{4}\tan 4x + c$

---

8) $\int \csc^2 2x\,dx$

رغم ان الاس تربيع الا ان sec من القواعد العشرة تتكامل مباشرة بس نحتاج مشتقة الزاوية =2 ونحتاج سالب.

$= -\frac{1}{2}\int \csc^2 2x \times -2dx$

$= -\frac{1}{2}\cot 2x + c$

---

9) $\int 9\sin 3x\,dx$

عندي 9 زيادة تطلع بره. الاس=امالت الدالة المثلثية يعني نحتاج مشتقة الزاوية بيها نقص =3

$= \frac{9}{3}\int \sin 3x \quad 3dx = -3\cos 3x + c$

10) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

الاس=١ مالت الدالة المثلثية. اذن مشتقة الزاوية

$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

يوجد نقص= $\frac{1}{3}$ نضعه ونضع خارج التكامل مقلوبها ونكامل.

$= 3 \times 2\int \sin\sqrt[3]{x} \quad \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \quad dx$

$= -6\cos\sqrt[3]{x} + c$

$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\cos x}$

لا تخضع لقانون لذلك نحاول ندخل المتطابقات و يصير اختصارات وكذا.

$= \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx$

$= \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}\,dx$

$= \int 1 - \cos x\,dx = x - \sin x + c$

القاعدة ١١ حيل مهمة (العمود الفقري للدوال المثلثية) شروطها: -

- ❖ مجموعة حدود مثلثية مرفوعة لاس معين او فوقها جذر معين بحيث الجذر على كل المقادير.
- ❖ دالة مثلثية مرفوعة لاس بحيث الاس لا يساوي واحد للدالة المثلثية. او الدالة المثلثية مضروبة او مقسومة على مقدار.

شلون نتعامل وي هيج دوال: -

$$A-\int [\text{مجموعة حدود مثلثية}]^n (\text{مشتقة داخل القوس})\ dx = \frac{1}{n+1}[\text{القوس نفسه}]^{n+1}+c$$

$$B-\int [\text{دالة مثلثية لزاوية ما}]^n (\text{مشتقة الدالة المثلثية})(\text{مشتقة الزاوية})\ dx = \frac{1}{n+1}[\text{نفس الدالة المثلثية}]^{n+1}+c$$

شلون نكامل بهاي وشوكت نطبقها؟

- ❖ لازم نلكه دالة مثلثية عليها اس مو واحد. الاس على الدالة وليس على الزاوية انتبه زين على الكلام.
- ❖ لازم مشتقة داخل القوس موجودة كاملة. اذا ما موجودة نحول المقدار الي خارج القوس بقوانين التحويل بحيث يصير مشتقة لداخل القوس.
- ❖ او لازم مشتقة الدالة المثلثية موجودة كاملة مع زاويتها والاس مالتها =1 شرط. للقاعدة الثانية
- ❖ مشتقة الزاوية موجودة ايضا.
- ❖ اذا توفرن ذن الشروط احذف كل المشتقات وضيف للاس واحد واضرب بمقلوب الاس.
- ❖ راح تلكه مرات ماكو مشتقة او مليوصة صايرة معارك. تدخل التحويلات المثلثية بحيث يصير عندك مشتقة.
- ❖ اذا الزاوية (ax) فمشتقتها =a لذلك ما يحتاج نوفرها وانما من نكامل مباشر نخلي مقلوب الزاوية قبل التكامل

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$	$\sin 2\vartheta=2\sin\vartheta\cos\vartheta$
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$	$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$	$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$	$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$	

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad .\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\tan\theta}\quad .\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

س /// جد التكاملات التالية

$$\int \sin^4 x\cos x\,dx$$

هنا القاعدة B. لاحظ الدالة المرفوعة لاس مشتقة الدالة المثلثية = $cosx$ ومشتقة الزاوية =1 اذن نكامل حسب القاعدة.

$$\int \underbrace{(sinx)^2}_{\text{قوس}}\ \underbrace{cosx\,.1\ \ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = \frac{1}{3}sin^3x+c$$

$$\int \cos^3(4x)\sin(4x)dx$$

حالةB لاحظ الدالة المرفوعة لاس مشتقة الدالة المثلثية = $-sin4x$ ومشتقة الزاوية =4 يوجد نقص هو (-4).

$$=-\frac{1}{4}\int \underbrace{(cos4x)^3}_{\text{قوس}}\times -4\ \underbrace{sin4x\ \ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}(cos4x)^4+c=-\frac{1}{16}cos^4 4x+c$$

$$\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x)dx$$

حالة A .لاحظ الدالة المرفوعة لاس و مشتقة داخل القوس = $\cos x + \sin x$ ومشتقة الزاوية =1 نكامل مباشر.

$$= \int \underbrace{(\sin x - \cos x)^7}_{\text{قوس}} \times \underbrace{(\cos x + \sin x)\ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = \frac{1}{8}(\sin x - \cos x)^8 + c = \frac{1}{8}(\sin x - \cos x)^8 + c$$

$$\int \frac{\sin^3(2x)}{\sec(2x)} dx$$

شوف،باوع،انظر:- كلما تلكه يم (sinx ,cosx) المقادير التالية (secx, cscx, tanx, cotx) ما يشتغلن لذلك تحولهن الى اصلهن ياللة يشتغلن .

الاس هنا على البسط نحتاج نوفر مشتقة Sinx لذلك نحول المقام .

$$\int \frac{\sin^3 2x}{\frac{1}{\cos 2x}} dx = \int \sin^3 2x\ \cos 2x\ dx = \int \underbrace{(\sin 2x)^3}_{\text{قوس}} \times \underbrace{\cos 2x\ \ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

نحتاج بس 2الي هي مشتقة الزاوية.

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{(\sin 2x)^3}_{\text{قوس}} \times 2\ \underbrace{\cos 2x\ \ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}(\sin 2x)^4 + c = \frac{1}{8}\sin^4 2x + c$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$$

أولا نتخلص من القسمة نرفع الجذر الى البسط ونغير اشارة الاس والبسط يصير مشتقة. هنا حالة A

$$= \int \underbrace{(1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{قوس}} \times \underbrace{\sin 2x\ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

مشتقة داخل القوس = $2\sin x \cos x$ الموجود لا يمثل مشتقة . بس يحتاج تحويل ويصير مشتقة.

$$\sin 2x = 2\sin x . \cos x$$

$$= \int \underbrace{(1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{قوس}} \times \underbrace{2\ \sin x \cos x\ \ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = 2(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} + c$$

ملاحظة جوهرية :- شوف اذا لكيت مقدار مثلثي مرفوع لاس يعني قصدي قوس سواء كان دالة مثلثية او عدة حدود والاس عدد صحيح او جذر وخارج القوس

- اذا كان هنالك مقدار خارج القوس سواء في المقام او بالبسط نحوله الى مشتقة لداخل القوس ولازم يتحول.
- اذا ماموجود مقدار خارج القوس نشتغل على داخل القوس لو نفتح الاس لو نتخلص من الجذر بحذفه مع تربيع مثلا.

$$\int \frac{sinx}{cos^2x}dx$$

الطريقة الثانية نسحب المقام ونجزئه	الطريقة الاولى نرفع المقام
$\int \frac{sinx}{cosx}\frac{1}{cosx}dx = \int tanx\ secx\ dx$ هسه صار قانون من القواعد العشرة. $= secx + c$	$= \int \underbrace{(cosx)^{-2}}_{قوس} \times \underbrace{sinx\ dx}_{مشتقة\ داخل\ القوس}$ $= -\int \underbrace{(cosx)^{-2}}_{قوس} \times \underbrace{-sinx\ dx}_{مشتقة\ داخل\ القوس}$ $= -\frac{1}{-1}(cosx)^{-1} + c = \frac{1}{cosx} + c$ $= secx + c$

$$\int \sqrt{1 - sin2x}\ dx$$

قوس مرفوع لاس جذر لكن خارج الجذر لا توجد مشتقة داخل القوس راح نحول مجموعة تحويلات .

$\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$\int \sqrt{\cos^2x + \sin^2x - 2sinx\ cosx}\ dx = \int \sqrt{\cos^2x - 2sinx\ cosx + \sin^2x}\ dx$$

والمقدار الي داخل الجذر هو مربع حدانية نرجعه الى أصله.

$$= \int \sqrt{\cos^2x - 2sinx\ cosx + \sin^2x}\ dx = \int \sqrt{(cosx - sinx)^2}\ dx = \mp \int cosx - sinx\ dx$$

هسه صار من القواعد العشرة.

$$= \mp[sinx + cosx] + c$$

بنظري هذا هو أصعب سؤال بكل الرياضيات. واحد من الاسئلة الي تحتاج انتباه عظيم وذكاء حاد لمعرفة التحليل للدالة.

هذا هو من جماليات الرياضيات التي يستلذ بها العقل كما يستلذ بالجمال.

$$\int \frac{\sqrt{cot\ 2x}}{1 - cos^2\ 2x}dx$$

المقام يمثل علاقة فيثاغورس نحوله.

$$\int \frac{\sqrt{cot2x}}{sin^2 2x}dx = \text{سحب} = \int \sqrt{cot2x}\ \frac{1}{sin^2 2x}dx = \int \underbrace{(cot2x)^{\frac{1}{2}}}_{قوس} \times \underbrace{csc^2 2x\ dx}_{مشتقة\ داخل\ القوس}$$

نحتاج بس سالب ايضا لمشتقة cot2x .

$$= -\int \underbrace{(cot2x)^{\frac{1}{2}}}_{قوس} \times \underbrace{-csc^2 2x\ dx}_{مشتقة\ داخل\ القوس} = -\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}(cot2x)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}(cot2x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$\int sinx\ cosx\ dx$

الطريقة الثالثة	الطريقة الثانية	الطريقة الاولى
$\int sinx\ cosx\ dx$ $sin2x = 2sinx\ cosx \quad \div 2$ $\frac{1}{2}sin2x = sinx\ cosx$ $= \int \frac{1}{2}sin2x\ dx$ $= \frac{1}{2}\int sin2x\ dx$ نوفر مشتقة الزاوية . $= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int sin2x\ \ 2dx$ $= -\frac{1}{4}cos2x + c$	$= -\int cosx\ (-sinx)dx$ $= -\frac{1}{2}cos^2x + c$ والف عافية	$\int sinx\ cosx\ dx$ $= \frac{1}{2}sin^2x + c$ وشكررن للناصرية .

$2010 - \int (cosx + sinx\ )^2\ dx$

نفتح مربع حدانية لان مشتقة القوس ما موجودة.

$= \int cos^2x + 2cosx\ sinx + sin^2x\ dx$ = نرتب = $\int cos^2x + sin^2x + 2\ sinx\ cosx\ dx$

$= \int 1 + sin2x\ dx \ = x - \frac{1}{2}cos2x + c$

$\int sin2x\ (sinx - 5)^2(sinx + 5)^2\ dx$

نحصر متشابات الاس ثم نرجعهن مربع كامل .

$= \int 2sinx\ cosx\ \ [(sinx - 5)\ \ (sinx + 5)]^2\ dx = \int [sin^2x - 25]^2\ \ 2sinx\ cosx$

$= \int \underbrace{[sin^2x - 25]^2}_{\text{قوس}} \times \underbrace{2sinx\ \ cosx\ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = \frac{1}{3}\underbrace{[sin^2x - 25]^3}_{\text{قوس}} + c$

$2015 - \int \frac{cosx}{\sqrt[3]{sinx}}\ dx$ = نرفع المقام

$= \int \underbrace{(sinx)^{-\frac{1}{3}}}_{\text{قوس}} \times \underbrace{cosx\ dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} \ = \frac{3}{2}\underbrace{(sinx)^{\frac{2}{3}}}_{\text{قوس}} + c$

تكامل الدوال المثلثية

القواعد العشرة

شوكت نطبقهن ؟ لما نلكه دوال مثلثية مطابقة للقوانين العشرة وماكو لا ضرب ولا قسمة و تحتاج فقط مشتقة الزاوية

قاعدة ١١

لما نلكه قوس مرفوع لاس او دالة مثلثية مرفوعة لاس او مضروبة او مقسومة على دالة ونكدرنا نوفر مشتقة داخل القوس بالتحويلات وكذا.

زين

المشكلة الي جاي يعاني منها الطالب هي انه يريد يكامل بكيفه!!!

شوف رحمة لخالك

اذا ما تسوي أي سؤال مثل القواعد العشرة او دالة مرفوعة لاس ومشتقتها موجودة كاملة

فمن المستحيل ان تكامل

هسه راح ناخذ مربعات الدوال المثلثية وهي لما تكون الدالة المثلثية مرفوعة لاس لكن ما موجود وياها أي شيء حتى تكدر تحوله الى مشتقة

تكامل مربعات الدوال المثلثية

دالة مثلثية مرفوعة لاس لكن غير مضروبة بمقدار وماكو مشتقتها ولا التحويلات بالمباشر تفيد وياها

$\int \sin^n x\, dx$ $\int \cos^n x\, dx$	$\int \sin^n x\, dx$ $\int \cos^n x\, dx$	$\int \sin^n x \cos^m x\, dx$	$\int \sin^n x \cos^m x dx$
n: - فردي نطبق التالي: - ١-اسحب واحد من المقدار ٢-حول المتبقي بقانون فيثاغورس $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ واذا كان الاس اكبر من ٣ سوية تربيع اس تربيع ثم حول. ودير بالك الزاوية تبقى نفسها ٣-دخل خارج القوس على داخله. ٤-يصير قاعدة ١١ و١٠ ٥-قبل ان تكامل وفر مشتقة الزاوية والاشارة ومن ثم كامل.	N=هنا الاس زوجي ١-نحوله تربيع مرفوع لاس ٢-نطبق قانون ابو نصيف $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ٣-نزل الاس وربع القوس مربع حدانية وإذا صار عندك مقدار تربيع هم طبق ابو نصيف مرة ثانية. ٤-هنا كلهن يصير الاس مالتهن =١ يعني الحل بالقواعد العشرة. ٥-قانون ابو نصيف يضاعف الزاوية كل مرة. ٦-وفر مشتقة الزاوية وكامل	N,m = الاس لوحد منهم فردي او اثنينهم فردي . ١-نسحب من الفردي الاقل او من الفردي. ٢-حول المسحوب منه الى بقى حسب فيثاغورس. ٣-دخل كل المقادير خارج القوس كلها ع داخل القوس. ٤-يصير قاعدة ١١. ٥-وفر مشتقة الزاوية والاشارة ثم كامل حسب القاعدة ١١.	هنا اثنينهم زوجي ١-اسحب من الاكبر مقدار بحيث يتساوون الى بقن. ٢-احصر المتساويات بقوس مرفوع لنفس الاس: - $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ٣-نزل الاس وربع ٤-حول الى سحبته بالبداية حسب ابو نصيف حتى تتوحد الزوايا. ٥-راح يصير عندك القواعد ١٠ وقاعدة ١١. ٦-وفر المشتقات للزوايا وكامل.

١-نبلش اذا الاس فردي . جد التكاملات التالية :-

$$\int \cos^3 x \, dx$$

$$= \int \cos^2 x \quad \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x) \cos x \, dx = \int \cos x - \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int \underbrace{\cos x}_{\text{قواعد 10}} - \underbrace{\sin^2 x}_{\text{قوس}} \underbrace{\cos x}_{\text{مشتقة}} \, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

=---

$$\int \sin^3 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \quad \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx = \int \sin x - \cos^2 x \sin x \, dx$$

الحد الأول مباشر والثاني قاعدة11 بس نحتاج سالب لمشتقة cosx

$$= \int \underbrace{\sin x}_{\text{قواعد 10}} + \underbrace{\cos^2 x}_{\text{قوس}} \left(-\underbrace{\sin x}_{\text{مشتقة}}\right) dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

٢-هسه ناخذ اذا كان الاس زوجي :- نسحب ثم نطبق قانون ابو نصيف .

$$\int \cos^4 3x \, dx$$

$$= \int [\cos^2 3x]^2 \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 6x)\right]^2 dx = \int \frac{1}{4} \underbrace{(1+\cos 6x)^2}_{\text{مربع حدانية}} \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos 6x + \underbrace{\cos^2 6x}_{\text{هم ابو نصيف}} \, dx = \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1+\cos 12x) \quad dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 12x \quad dx = \frac{1}{4}\int 1 + \frac{1}{2} + 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x \quad dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3}{2} + 2\cos 6x + \frac{1}{2}\cos 12x \quad dx$$

هسه كلهن ينحلن بالقواعد العشرة لان اسهن واحد. بس نضرب بمقلوب الزاوية لكل حد يحتاج زاوية ونكامل.

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\sin 6x + \frac{1}{24}\sin 12x\right] + c$$

$\int cos^2 2x\, dx$

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\ dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x\right] + c$

==

$\int sin^2 8x\, dx$

$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 16x)\ dx = \text{نوفر} = \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{16}\cos 16x \quad 16\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{16}\sin 16x\right] + c$

$\int (1+cos3x)^2\, dx$

مربع حدانية $= \int 1 + 2\cos 3x + \underbrace{\cos^2 3x}_{\text{هم ابو نصيف}}\ dx = \int 1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2}(1+\cos 6x) \quad dx$

$= \int 1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x \quad dx = \int 1 + \frac{1}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x \quad dx$

$= \int \frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x \quad dx$

هسه كلهن ينحلن بالقواعد العشرة لان اسهن واحد. بس نضرب بمقلوب الزاوية لكل حد يحتاج زاوية ونكامل.

$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 6x + \frac{1}{12}\sin 6x\right] + c$

$\int sin^4 x\, dx$

$= \int [\sin^2 x]^2\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx = \int \frac{1}{4}\underbrace{(1-\cos 2x)^2}_{\text{مربع حدانية}}\ dx$

$= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \underbrace{\cos^2 2x}_{\text{هم ابو نصيف}}\ dx = \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \quad dx$

$= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x \quad dx = \frac{1}{4}\int 1 + \frac{1}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x \quad dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x \quad dx$

هسه كلهن ينحلن بالقواعد العشرة لان اسهن واحد. بس نضرب بمقلوب الزاوية لكل حد يحتاج زاوية ونكامل.

$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + c$

٣-هسه اذا مضروبات وفوكهن اثنينهن اس بس واحد منهم فردي او اثنينهم .

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \;\; dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos x \underbrace{\cos^2 x}_{\text{مسحوب منه}} \;\; dx = \int \sin^2 x \; \cos x \; \underbrace{(1 - \sin^2 x)}_{\text{فيثاغورس}} \;\; dx =$$ ندخل على القوس

$$= \int \sin^2 x \; \cos x - \sin^4 x \;\; \cos x \;\; dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{\text{قوس}} \underbrace{\cos x}_{\text{مشتقة}} - \underbrace{\sin^4 x}_{\text{قوس}} \underbrace{\cos x}_{\text{مشتقة}} \;\; dx$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

===

$$\int \cos^4 2x \sin^5 2x \;\; dx$$

$$= \int \cos^4 2x \sin 2x \; \underbrace{\sin^4 2x}_{\text{مسحوب منه}} \;\; dx$$

$$= \int \cos^4 2x \sin 2x \; \underbrace{[\sin^2 2x]^2}_{\text{مسحوب منه}} \;\; dx \; = \int \cos^4 2x \sin 2x \; \underbrace{[1 - \cos^2 2x]^2}_{\text{فيثاغورس}} \;\; dx \;\; dx =$$ نفتح الحدانية

$$= \int \cos^4 2x \sin 2x \; \underbrace{(1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x)}_{\text{الحدانية}} \;\; dx =$$ ندخل على القوس

$$= \int \cos^4 2x \sin 2x - 2\cos^6 2x \sin 2x + \cos^8 2x \sin 2x \;\;\; dx$$

نوفر سالب لمشتقة الcosx وكل الحدود نطبق عليها قاعدة ١١.

$$= -\int (\cos 2x)^4 \; (-\sin 2x) - 2(\cos 2x)^6 \; (-\sin 2x) + (\cos 2x)^8 \; (-\sin 2x) \; dx$$

$$= -[\frac{1}{5}\frac{1}{2} \; (\cos 2x)^5 \;\; - \frac{2}{7}\frac{1}{2} (\cos 2x)^7 \;\; + \frac{1}{9}\frac{1}{2} (\cos 2x)^9] + c$$

$$= -[\frac{1}{10} \; (\cos 2x)^5 \;\; - \frac{1}{7} (\cos 2x)^7 \;\; + \frac{1}{18} (\cos 2x)^9] + c$$

ملحوظة الرقم الي خارج التكامل من تكامل لازم تخلي قوس لان يعتبر مضروب بكل حدود التكامل. وبعد التكامل تريد تعوقه تريد يدخل على القوس وينضرب بكل الحدود وانت بكيفك.

٤-إذا الاسس زوجية. نسحب من الاكبر مقدار بحيث يتساوون.

$$\int \cos^2x\ \sin^4x\ dx = \text{نسحب} = \int \cos^2x\,.\sin^2x.\sin^2x\ dx = \int \underbrace{(\sin x \cos x)^2}_{\text{نحصر}}\ \underbrace{\sin^2x}_{\text{ينتظر}}\ dx$$

$$= \int \underbrace{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2}_{\text{نحول}} \underbrace{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}_{\text{ابو نصيف}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4}\sin^2 2x\,(1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \underbrace{\sin^2 2x}_{\text{ابو نصيف}} - \sin^2 2x\cos 2x\ dx = \frac{1}{8}\int \underbrace{\frac{1}{2}(1-\cos 4x)}_{\text{ابو نصيف}} - \sin^2 2x\cos 2x\ dx$$

الحد الاول قواعد عشرة والثاني قاعدة ١١.

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin^2 2x\cos 2x\ \ 2dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sin^3 2x\right] + c == \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right] + c$$

$$\int \cos^2 3x\ \sin^2 3x\ dx = \text{متساويان}$$

$$= \int \underbrace{(\sin 3x \cos 3x)^2}_{\text{نحصر}}\ dx = \int \underbrace{\left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)^2}_{\text{نحول}}\ dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 6x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{1}{2}(1-\cos 12x)}_{\text{ابو نصيف}}\ dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{12}\sin 12x\right) + c$$

هسه انتهت الحالات راح ناخذ اسئلة متفرقة.

$$\int \sin^2x + \cos^4x\ dx$$

هذا كل سؤال يحل بوحده حسب قاعدة ابو نصيف.

$$= \int \underbrace{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}_{\text{ابو نصيف}} + [\cos^2x]^2 dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \underbrace{\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2}_{\text{ابو نصيف}}\ dx$$

نفتح الحد الثاني مربع حدانية.

$$= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$$

$$= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x dx = \int \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] dx$$

$$= \int \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x \ dx = \text{نجمع} = \int \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x \quad dx = \frac{7}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$\int \cos^4 x - \sin^4 x \ dx$$

هذا تريد تحله كل مقدار بوحده حسب ابو نصيف تريد تحلله فرق بين مربعين أسرع.

$$= \int \underbrace{(\cos^2 x - \cos^2 x)}_{\text{صار قانون}} \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{\text{فيثاغورس}} dx = \int \underbrace{\cos 2x}_{\text{قانون}} \underbrace{1}_{\text{فيثاغورس}} dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2 \ dx$$

نفتح الاقواس وتصير ضرب.

$$= \int \underbrace{\cos^2 2x \sin 2x}_{\text{قاعدة11}} + \underbrace{2\sin 2x}_{\text{جاهز}} - \underbrace{\cos^2 2x}_{\text{ابو نصيف}} - 2 \ dx = \int \underbrace{\cos^2 2x \sin 2x}_{\text{قاعدة11}} + \underbrace{2\sin 2x}_{\text{جاهز}} - \underbrace{\frac{1}{2}(1+\cos 4x)}_{\text{ابو نصيف}} - 2 \ dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\cos^2 2x \sin 2x \ + \sin 2x \quad 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x \ - 2 \ dx$$

هسه نكامل كل حد حسب قاعدته ونحذف مشتقات الزوايا.

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - 2x + c = \frac{1}{6}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx$$

اذا كيت $(1 \mp \sin x)$ او $(1 \mp \cos x)$ في البسط او المقام نضرب بالعامل المنسب او تحلل وتوفر اختصار.

العامل المنسب	التحليل سحب ثم فيثاغورس
$= \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x} dx$	$= \int \frac{\cos x \ \cos^2 x}{1+\sin x} dx =$ نحول
$= \int \frac{\cos^3 x \ (1-\sin x)}{1-\sin^2 x} dx$	$= \int \frac{\cos x \ (1-\sin^2 x)}{1+\sin x} dx =$ نحلل
$= \int \frac{\cos^3 x \ (1-\sin x)}{\cos^2 x} dx =$ اختصار	$= \int \frac{\cos x \ (1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x} dx =$ اختصار
$= \int \cos x \ (1-\sin x \ ) dx =$ ضرب	$= \int \cos x \ (1-\sin x \ ) dx =$ ضرب
$= \int \cos x \ - \sin x \cos x \ \ dx$	$= \int \cos x \ - \sin x \cos x \ \ dx$
الجزء الاول قواعد والثاني قاعدة 11.	*الجزء الاول قواعد والثاني قاعدة 11.*
$= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + c$	$= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + c$

عندما تكون الزوايا غير موحدة

عندما نجد $\int sin2\theta\ cos\theta\ dx$ او $\int sin\theta\ cos2\theta\ dx$ يعني الزوايا غير موحدة.

- يفضل تحويل الزاوية الكبيرة الى الصغيرة. حسب قوانين التحويل من الضعف الى النصف.
- القوانين هي :-

$\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$	$Cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$ $= 1 - 2sin^2\theta$ $= 2cos^2\theta - 1$

- بالنسبة ل sin2x فلها قانون واحد. لكن cos2x نستخدم اول قانون عند وجود اختصار او مقدار مشابه. ونستخدم الثاني والثالث بعكس الموجود مع cos2x في السؤال.

1) $\int \sin 6x \cos^2 3x\ dx$

$= \int 2sin3x\ cos3x\ cos^2 3x\ \ dx\ = 2\int sin3x\ \ cos^3 3x\ \ \ dx = -2\int cos^3 3x\ \ \ \ -sin3x\ \ \ dx$

تطبيق قاعدة 11

$= -\frac{2}{3}\frac{1}{4}cos^4 3x + c = -\frac{1}{6}cos^4 3x + c$

---

2) $\int cos2x\ sinx\ \ dx$

نختار المخالف sinx

$= \int (2\ cos^2 x - 1)\ \ \ sinxdx\ = \int 2\ cos^2 x\ \ \ sinx - sinxdx = \frac{2}{3}\ cos^3 x + cosx + c$

---

3) $\int sin2x(\ sinx + cosx)\ dx$

$= \int 2sinx\ cosx\ (sinx + cosx)\ \ dx$ = ندخل $= 2\int sin^2 x\ \ cosx + cos^2 x\ sinx\ \ \ \ dx$

صارن قاعدة 11 هسه بس نوفر مشتقة cosx تحتاج سالب.

$= 2\int sin^2 x\ \ cosx - cos^2 x\ (-sinx)\ \ \ \ dx = 2\left[\frac{1}{3}\ sin^3 x - \frac{1}{3}\ cos^3 x\right] + c$

4) $\int sin4x\ cosx\ dx$

هذه هنا نحول مرتين لما نوصل

$= \int 2sin2x\ cos2x\ cosx\ \ dx$ = مرة نحول اخرى $= 2\int \underbrace{2sinx\ cosx}_{\text{حولت}}\ \underbrace{(2cos^2x - 1)}_{\text{حولت}}\ cosx\ dx$

ليش اختاريت 2cos حتى كل المقادير تصير cos وتبقى sinx وحيدة فريدة وتصير مشتقة .هسه ندخل خارج القوس

$= 4\int (2cos^4x\ \ sinx - cos^2x\ \ sinx)\,dx$

هسه صار قاعدة 11 بس نوفر اشارة سالب مالت مشتقة cosx .

$= -4\int (2cos^4x\ \times -sinx - cos^2x\ \times -sinx)\,dx = -4\left[\frac{2}{5}cos^5x - \frac{1}{3}cos^3x\right] + c$

---

5) $\int \frac{cos4x}{cos2x - sin2x}\ dx$

نوحد الزوايا بتحويل البسط. بس راح استخدم قانون يشبه المقام واحلل فرق مربعين حتى يصير اختصار. باوع

$= \int \frac{cos^2 2x - sin^2 2x}{cos2x - sin2x}dx$ = هسه نحلل فرق مربيعن

$= \int \frac{(cos2x - sin2x)(cos2x + sin2x)}{cos2x - sin2x}dx$

$= \int cos2x + sin2x\ dx$ = قواعد عشرة $= \frac{1}{2}[sin2x - cos2x] + c$

---

6) $\int cos2x\ cos^2x\ \ dx$

هذا السؤال شويه بيه اختلاف اذا احول الزاوية الكبيرة راح يكون الحل اطول لذلك افضل طريقة انو احول الاقل حسب ابو نصيف.

$= \int\ cos2x \times \frac{1}{2}\ (1 + cos2x)\ \ dx$ = ندخل $= \frac{1}{2}\int\ cos2x + cos^2 2x\ \ dx$

$= \frac{1}{2}\int\ cos2x + \underbrace{\frac{1}{2}(1 + cos4x\,)}_{\text{ابو نصيف}}\ dx$ = نوفر $= \frac{1}{2}\int\ cos2x\ \ \ + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ \ \ cos4x\ \ \ dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ sin2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\ sin4x\right] + c$

الدوال المثلثية الخاصة $\tan\theta . \cot\theta . \sec\theta . \csc\theta$

الحالة الثانية	الحالة الأولى
$1-\int \underbrace{\tan^n\theta}_{\text{قوس}} \; .\underbrace{\sec^2\theta d\theta}_{\text{مشتقتها}}$ = قاعدة 11 $2-\int \underbrace{\cot^n\theta}_{\text{قوس}} \; .\underbrace{\csc^2\theta d\theta}_{\text{مشتقتها}}$ = قاعدة 11	$1-\int \sec^n\theta \tan\theta \, d\theta$ = نسحب واحد $=\int \underbrace{\sec^{n-1}\theta}_{\text{قوس}} \; .\underbrace{\sec\theta \tan\theta \, d\theta}_{\text{مشتقتها}}$ = قاعدة 11 $2-\int \csc^n\theta \cot\theta \, d\theta$ = نسحب واحد $=\int \underbrace{\csc^{n-1}\theta}_{\text{قوس}} \; .\underbrace{\csc\theta \cot\theta \, d\theta}_{\text{مشتقتها}}$ = قاعدة 11
$B-\int \tan^n\theta \; d\theta = \int \tan^{n-2}\theta \; \tan^2\theta \; d\theta$ $\int \cot^n\theta \; d\theta = \int \cot^{n-2}\theta \; \cot^2\theta \; d\theta$ ونستخدم معها التحويل التالي $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$ ويتحول الى دالة ومشتقتها حسب قاعدة ١١	$B-\int \sec^n\theta \; d\theta$ $=\int \sec^{n-2}\theta \; \sec^2\theta \; d\theta$ $\int \csc^n\theta \; d\theta = \int \csc^{n-2}\theta \; \csc^2\theta \; d\theta$ ونستخدم معها التحويل التالي $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$ $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$ ويتحول الى دالة ومشتقتها حسب قاعدة ١١

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

ما يشتغل cosx يم tanx لازم نحوله. راح اسحب المقام واحوله بقوانين التحويل. راح يصير حالة ٢

$$\int \tan x \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \quad \sec^2 x \, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + c$$

طريقة ٢

$$\int \tan x \quad \sec^2 x \, dx = \int \sec x \quad \sec x \tan x \, x \, dx \frac{1}{2}\sec^2 x + c$$

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x} dx$$

نرفع المقام ونغير الاشارة ونحول المقام.

$$= \int (\tan x)^{-2} \; (1+\tan^2 x) \, dx$$

مشتقة داخل القوس = $\sec^2 x$ الموجود لا يمثل مشتقة . بس يحتاج تحويل ويصير مشتقة.

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \qquad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$= \int \underbrace{(\tan x)^{-2}}_{\text{قوس}} \times \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = -\frac{1}{1}(\tan x)^{-1} + c = -\frac{1}{\tan x} + c = -\cot x + c$$

$$\int \tan^6 x \quad \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \underbrace{(\tan x)^6}_{\text{قوس}} \times \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{\text{مشتقة داخل القوس}} = \frac{1}{7}(\tan x)^7 + c$$

$$\int (\tan x + \cot x)^2$$

كل الدوال المثلثية اذا داخل قوس مرفوع لاس عدد صحيح موجب نفتح مربع حدانية. ثم نحول بقوانين التحويل.

$= \int \tan^2 x + 2\tan x \cot x + \cot^2 x\, dx =$ نحول

$= \int \sec^2 x - 1 + 2\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos x}{\sin x} + \csc^2 x - 1 \; dx =$ اختصار

$$= \int \sec^2 x + 2 + \csc^2 x - 2 \; dx = \int \sec^2 x + \csc^2 x \; dx$$

$= \tan x - \cot x + c.$ صارن القواعد العشرة نكامل قبلا

$$\int \sec^4 x\, dx$$

حالة رابعة نسحب اثنين ثم نحول وندخل خارج القوس ع داخله :-

$$= \int \sec^2 x \sec^2 x \; dx = \int \sec^2 x\,(1 + \tan^2 x) \; dx = \int \sec^2 x + \tan^2 x \quad \sec^2 x \; dx$$

هسه صار الحد الاول قواعد عشرة والثاني قوس ومشتقته. $= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$

$$\int \tan^4 x\, dx$$

حالة ثالثة نسحب اثنين ثم نحول وندخل خارج القوس ع داخله :-

$$= \int \tan^2 x \tan^2 x \; dx = \int \tan^2 x\,(\sec^2 x - 1) \; dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \quad - \quad \tan^2 x \; dx$$

هسه صار الحد الاول قاعدة 11 والثاني نحوله مرة ثانية.

$$= \int \tan^2 x \;\; \sec^2 x \quad - \; (\sec^2 x - 1) \; dx = \int \tan^2 x \;\; \sec^2 x \quad - \sec^2 x + 1 \; dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$$

$\int sec^4x\, tan^4x dx$

هنا طبك الحالة ٣+٤ ويفضل بهيج حالة نسحب من secx.

$$= \int tan^4x\, sec^2x\, sec^2x \; dx = \int tan^4x\, sec^2x(tan^2x + 1) \; dx$$

$$= \int tan^6x \; sec^2x \;\; + \;\; tan^4x\, sec^2x \; dx = \frac{1}{7}tan^7x + \frac{1}{5}tan^5x + c$$

$$\int tan^2xdx \; = \int \; sec^2 8x - 1 \;\; dx = \frac{1}{8}tan8x - x + c$$

إذا لم تستطع شرح فكرتك لطفل عمره أعوام فأنت نفسك لم تفهمها بعد. ألبرت هيرمان اينشتاين-الماني-امريكي-سويسري

التكامل المحدد

اذا كانت الدالة مستمرة في الفترة [a ,b] فان التكامل المحدد على هذه الفترة يعطى :-

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = (b \text{ بالدالة عوض}) - (a \text{ تعويض})$$

- نكامل التكامل غير المحدد بس هنا ما نتركها دالة وانما نعوض مكان كل x بقيمة b ونطرح منه التعويض a.
- ما عدنا هنا (C+) لان راح تختصر بالتعويض.
- خواص التكامل المحدد :-

أ-اذا كانت الدالة فوق محور السينات (موجب) فان ناتج تكاملها عدد موجبا والعكس بالعكس.

$f(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$f(x) \leq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

ب-اذا كانت الدالة مضروبة بعدد فان ناتج التكامل هو العدد في ناتج تكامل الدالة. ويصير نخرج العدد بره التكامل

$$\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

ج-يجوز توزيع التكامل على الجمع والطرح ولا يجوز توزيعه على القسمة والضرب =عكس الاسس والجذور

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2) = \int_a^b f_1 \mp \int_a^b f_2$$

د-يمكن تقسيم فترة التكامل الى عدد غير منته من الفترات وناتج التكامل الكلي =مجموع تكامل التجزئة لكل الفترات

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ و كانت $c \in (a,b)$ فان :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ه-تكامل اي دالة من عدد لنفس العدد =صفر دوما. و اذا عكسنا فترة التكامل نضرب التكامل باشارة سالب.

$$a)\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad b)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

هسه ناخذ اسئلة مطلوب بيها ايجاد مقدار.

١- نوزع التكامل على كل حد.
٢- نطبق قواعد التكامل المحدد على الدوال بعد التوزيع.
٣- اذا مضروبة بعدد طلعه خارج التكامل.
٤- اذا الحدود مقلوبة رجعها لأصلها واضربها بسالب.
٥-اذا انطاك معلومة ثانوية بسطها ورتبها وبعدين طلع منها الي تريدها وعوضها.

مثال (9)/ أذا كان $\int_2^5 f(x)dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5f(x)dx$

الحل: - هنا نطلع الرقم خارج التكامل وعدنا ناتج التكامل بس نضربهم.

$$= 5\underbrace{\int_2^5 f(x)dx}_{\text{موجود}} = 5 \times 8 = 40$$

مثال ١٠- اذا كان $\int_2^5 f_1 = 12$ وكان $\int_2^5 f_2 = 15$ فجد كل

$$\int_2^5 f_1 + f_2 = \int_2^5 f_1 + \int_2^5 f_2 = 15 + 12 = 27$$

$$\int_2^5 f_1 - f_2 = \int_2^5 f_1 - \int_2^5 f_2 = 15 - 12 = 3$$

$$\int_5^2 f_1 - \frac{4}{3} f_2 = -\left[\int_2^5 f_1 - \frac{4}{3}\int_2^5 f_2\right]$$

$$= -[15 - \frac{4}{3} 12] = 1$$

٢٠١٨- اذا كان $\int_2^1 f(x) = 4$ فجد $\int_1^2 [2 - f(x)]dx$

في البدء نستخدم المعلومة بعد قلب حدودها

$$\int_2^1 f(x) = 4 \overset{\text{تؤدي}}{\Longrightarrow} \int_1^2 f(x) = -4$$

نجد الناتج المطلوب بعد توزيع التكامل

$$\int_1^2 [2 - f(x)]dx = \int_1^2 2dx - f(x)dx$$

$$= [2x]_1^2 - [-4]$$

$$= [(2 \times 2) - (2 \times 1)] + 4$$

$$= 4 - 2 + 4 = 6$$

اذا كان $\int_3^0 f(x) = -2$ أثبت $\int_0^3 [2f(x) + 3x^2]dx = 31$

في البدء نستخدم المعلومة بعد قلب حدودها

$$\int_3^0 f(x) = -2 \overset{\text{تؤدي}}{\Longrightarrow} \int_0^3 f(x) = 2$$

$$\int_0^3 2f(x)dx + \int_0^3 3x^2\,dx$$

$$= 2\int_0^3 f(x)dx + [x^3]_0^3$$

$$= 2[2] + [(3^3) - (0)]$$

$$= 4 + 27 = 31$$

اذا كان $\int_1^4 f(x) + 3x^2 = 20$ فجد $\int_4^1 f(x)dx$

$$\int_1^4 f(x)dx + \int_1^4 3x^2\,dx = 20$$

$$\int_1^4 f(x)dx + [x^3]_1^4 = 20$$

$$\int_1^4 f(x)dx + 4^3 - 1^3 = 20$$

$$\int_1^4 f(x)dx + 63 = 20$$

$$\int_1^4 f(x)dx = 20 - 63$$

$$\int_1^4 f(x)dx = -43$$

اذا $\int_0^1 [f(x) - 4x]dx = 30$ فجد قيمة المقدار $-5\int_1^0 f(x)dx$ ؟

الحل: - نجد قيمة تكامل الدالة بوحده ونضربه ب-5 .
نوزع التكامل

$$\int_0^1 [f(x) - 4x]dx \; = \text{نوززززع}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\text{المطلوب}} - \underbrace{\int_0^1 4xdx}_{\text{تكامل}}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\text{المطلوب}} - [2x^2]_0^1$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\text{المطلوب}} - [(2 \cdot 1^2) - (2 \cdot 0)]$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\text{المطلوب}} - 2 = 30$$

اذا $\int_0^1[f(x)+n]dx = 1$ فجد قيمة المقدار n اذا كان $\int_0^1 f(x)dx = -3$

$$\int_0^1 [f(x)+n]dx = 1$$

$$\text{نوزع}\quad \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\text{موجود}} + \underbrace{\int_0^1 n dx}_{\text{نكامل}} = -3 + [nx]_0^1 = 1$$

$$-3 + [(n\times 1) - (n\times 0)] = 1$$
$$-3 + n = 1$$
$$n = 1 + 3 = 4$$

مثال (12)/ أذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$ ، $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فأوجد $\int_1^7 f(x)dx$

اذا منطيك 3 حدود للتكامل ترتب الحدود تصاعديا من الاقل الى الاكبر .بعدين تطبق تكامل الفترة الكلية=مجموع تكامل الاجزاء.

$$\int_1^7 f(x)\,dx = \underbrace{\int_1^3 f(x)dx}_{\text{موجود}} + \underbrace{\int_3^7 f(x)dx}_{\text{موجود}}$$
$$= 5 + 8 = 13$$

جد تكاملات:-

$$\int_{-2}^{2} (3x-2)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 3x - 2\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^{2}$$
$$= \left[\left(\frac{3}{2}(2)^2 - 2(2)\right) - \left(\frac{3}{2}(-2)^2 - 2(-2)\right)\right]$$
$$= \left[\left(\frac{12}{2} - 4\right) - \left(\frac{12}{2} + 4\right)\right]$$
$$= [(6-4) - (6+4)]$$
$$= 2 - 10 = -8$$

س-اثبت ان

$$b)\int_3^2 3\,x^2 dx = -\int_2^3 3x^2 dx$$

$$LHS = \int_3^2 3x^2\,dx = [x^3]_3^2 = [(2)^3 - (3)^3]$$
$$= [8 - 27] = -19$$
$$RHS = -\int_2^3 3x^2\,dx = -[x^3]_2^3$$
$$= -[(3)^3 - (2)^3] = -[27 - 8]$$
$$= -19$$
$$LHS = RHS$$

٢٠٠٨/ اذاكان $\int_a^b f = 5$ وكان $\int_c^b f = 3$ حيث ان $c \in [a.b]$ فجد قيمة $\int_a^c f$؟

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\text{موجود}} = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\text{مطلوب}} + \underbrace{\int_c^b f(x)dx}_{\text{موجود}}$$

$$5 = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\text{مطلوب}} + 3$$

$$5 - 3 = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\text{مطلوب}}$$

$$\underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{\text{مطلوب}} = 2$$

اوجد التكاملات التالية (وزاريات)

$$\int_1^3 \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2} dx$$

نوزع المقام لان حد واحد.

$$= \int_1^3 \frac{2x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2} dx$$
$$= \int_1^3 2x - 4 + 5x^{-2} dx = \text{نكامل}$$
$$= [x^2 - 4x - 5x^{-1}]_1^3$$
$$= \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x}\right]_1^3$$
$$= \left[\left(3^2 - 4\times 3 - \frac{5}{3}\right) - \left(1^2 - 4\times 1 - \frac{5}{1}\right)\right]$$
$$= \left[\left(9 - 12 - \frac{5}{3}\right) - (1 - 4 - 5)\right]$$
$$= \left[\left(-3 - \frac{5}{3}\right) - (-8)\right]$$
$$= \frac{-9 - 5 + 24}{3} = \frac{10}{3}$$

d) $\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\, dx$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(x+4\sqrt{x}+4)\ dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)\ dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{2}{5}1^{\frac{5}{2}}+2\ 1^2+\frac{8}{3}\ 1^{\frac{3}{2}}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{2}{5}+2+\frac{8}{3} = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

المقام جذر يرفع للبسط ومشتقة داخل القوس =1 نكامل مباشر.

$$= \int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}}\quad dx = \frac{3}{2}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7$$

$$= \frac{3}{2}\left[(7+1)^{\frac{2}{3}}-(0+1)^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[(8)^{\frac{2}{3}}-(1)^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[(2^3)^{\frac{2}{3}}-1\right] = \frac{3}{2}[4-1]$$

$$= \frac{9}{2}$$

f) $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}dx$

نحلل البسط فرق مكعبين ونختصر المقام.

$$= \int_3^2 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}dx$$

$$= \int_3^2 x^2+x+1\ dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_3^2$$

$$= \left[\left(\frac{2^3}{3}+\frac{4}{2}+2\right)-\left(\frac{3^3}{3}+\frac{9}{2}+3\right)\right]$$

$$= \left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{3}{2}+12\right)$$

$$= \frac{8}{3}+4-\frac{3}{2}-12$$

$$= \frac{8}{3}-\frac{9}{2}-8 = \frac{16-27-48}{6} = \frac{-59}{6}$$

---

a) $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2 dx$

نفتح الاقواس ضرب دالتين ثم كل حد نكامله بوحده.

$$= \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)dx$$

$$= \int_1^4 x^3+2x^2+x-2x^2 - 4x-2\ dx$$

$$= \int_1^4 x^3-3x-2\ dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^4$$

$$= \left[\left(\frac{4^4}{4}-\frac{3\ 4^2}{2}-2.4\right) - \left(\frac{1^4}{4}-\frac{3\ 1^2}{2}-2.1\right)\right]$$

$$= \left[(64-24-8)-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2\right)\right]$$

$$= (32)-\left(\frac{2-12-16}{8}\right)$$

$$= 32+\frac{13}{4} = \frac{128+13}{8}$$

$$= \frac{141}{4}$$

c) $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1}dx$

نحلل البسط فرق بين مربعين. بس هالمرة نحلل مرتين حتى يصير اختصار.

$$= \int_2^3 \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}dx$$

$$= \int_2^3 \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}dx =$$ اختصار

$$\int_2^3 (x+1)(x^2+1)\,dx =$$ نضربهم

$$= \int_2^3 x^3+x+x^2+1\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x\right]_2^3$$

$$= \left[\left(\frac{3^4}{4}+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{3}+3\right) - \left(\frac{2^4}{4}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+2\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+9+3\right) - \left(4+2+\frac{8}{3}+2\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}+12\right) - \left(8+\frac{8}{3}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{81+18+48}{4}\right) - \left(\frac{24+8}{3}\right)\right] = \frac{147}{4} - \frac{32}{3}$$

$$= \frac{441-128}{12} = \frac{313}{12}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$$

المقام قوس يرفع للبسط ومشتقة داخل القوس = 3 نوفرها و نكامل مباشر.

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (3x-4)^{-2}\ \ 3\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{-1}\left[(3x-4)^{-1}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3(2)-4}\right) - \left(\frac{1}{3(1)-4}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{6-4}\right) - \left(\frac{1}{3-4}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{-1}\right)\right] = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}+1\right]$$

$$= -\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = 2$$

$$\int_a^4 (x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\ x\,dx = 2$$

المشتقة لداخل القوس= $2x$ الموجود غير مطابق.
يوجد نقص بالموجودة. نضرب ب 2.

$$\frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\ 2x\,dx = 2$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{2}{1}\left[(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2$$

$$\left[(16+9)^{\frac{1}{2}} - (a^2+9)^{\frac{1}{2}}\right] = 2$$

$$5-\sqrt{a^2+9} = 2$$

$$\sqrt{a^2+9} = 5-2$$

$$\sqrt{a^2+9} = 3$$

$$a^2 = 9-9$$

$$a = 0$$

تكامل القيمة المطلقة

١-نقول ان الدالة مستمرة (لان بالسادس ع ناخذ بس الدالة كثيرة الحدود=خطية) على الفترة المعطاة ولها قاعدتان:-

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\ge 0 \quad x\ge c \\ -f(x) & f(x)<0 \quad x<c \end{cases}$$

دالة الاكبر دائما يمين الحد الفاصل الي هو C
ودالة الاصغر هي دالة اليسار للحد الفاصل خوشن.

٢-نروح على جهة نرسم خط الاعداد وننزل الحد الفاصل ونضع يمينه الدالة الموجبة ويساره السالبة.

٣-نضع الفترة مالتنا ع خط الاعداد همينا حسب موقعها الصحيح مو تشمرها بغير مكان. وراح يكون عندي احتماليَن:-

أ-اذا الحد الفاصل صار ضمن الفترة هنا راح نجزئ التكامل الى تكاملين:-

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c -f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

ب-اذا الفترة صارت بجهة اليمين او بجهة اليسار من الحد الفاصل فقط يعني الحد الفاصل مو بالنص هنا تأخذ تكامل الفترة نفسها وتاخذ الجزء الموجب او السالب حسب موقع الفترة وهايهيه.

مثال:-اذا كان $f(x)=|x|$ فجد تكامل $\int_{-3}^{4} f(x)$

الحل باوع ع الخطوات شون راح أسويها.

١-الدالة مستمرة على الفترة $[-3.4]$ ولها قاعدتان:-

$$f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

٢-الحد الفاصل راح يقسم الفترة الى فترتين يمين ويسار. $x=0 \in [-3.4]$

نعوض كل فترة

$$\int_{-3}^{4}|x|\,dx=\int_{-3}^{0}-xdx+\int_{0}^{4}x\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$=\left[(0)-(-\frac{(-3)^2}{2})\right]+\left[\left(\frac{(4)^2}{2}\right)-(0)\right]=\frac{9}{2}+\frac{16}{2}=\frac{25}{2}$$

تمارين:- جد تكامل $\int_0^2|x-1|$

١-الدالة مستمرة على الفترة $[0.2]$ ولها قاعدتان:-

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \forall\ x\ge 1 \\ -(x-1)=1-x & \forall\ x<1 \end{cases}$$

٢-الحد الفاصل راح يقسم الفترة الى فترتين يمين ويسار. $x=1 \in [0.2]$

$$\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 1-x\,dx + \int_1^2 x-1\,dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2$$ نعوض كل فترة

$$= \left[\left(1-\frac{1^2}{2}\right)-(0)\right] + \left[\left(\frac{(2)^2}{2}-2\right)-\left(\frac{(1)^2}{2}-1\right)\right] = \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{2-1}{2}\right)\right] + \left[0-\left(\frac{1-2}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

تمارين:- جد تكامل $\int_0^2 |2x-4|$

١-الدالة مستمرة على الفترة $[-3.4]$ ولها قاعدتان:-

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \to 2x-4 \ge 0 \quad \to 2x \ge 4 \quad \forall\ x \ge 2 \\ -(2x-4) = 4-2x & \to 2x-4 < 0 \quad \to 2x < 4 \quad \forall\ x < 2 \end{cases}$$

٢-الحد الفاصل راح يقسم الفترة الى فترتين يمين ويسار.

$2x-4=0 \qquad x=2 \ \in [-3.4]$

$$\int_{-3}^4 |2x-4|\,dx = \int_{-3}^2 4-2x\,dx + \int_2^4 2x-4\,dx = [4x-x^2]_{-3}^2 + [x^2-4x]_2^4$$ نعوض كل فترة

$$= [(8-4)-(-12-9)] \qquad + [(16-16)-(4-16)] = [4+21]+[12] = 37$$

حتى تطلع الحد الفاصل اجعل الدالة =0 وحلها وطلع الحد الفاصل. وأتأكد منه اذا بنص الفترة يجزئ التكامل مرة سالب مرة موجب واذا خارج الفترة او احد ارقام الفترة تخليه على خط الاعداد وتخلي الفترة مالتك همينا وتشوفها صايرة يمين الحد الفاصل تأخذ الدالة الموجب واذا يسارها تاخذ بس اليسار وشكرا للناصرية. ملحوظة

$\sqrt{\text{مقدار}^2} = |\text{مقدار}| = \mp\text{المقدار} \qquad . \left(\sqrt{\text{مقدار}}\right)^2 = +\text{المقدار}$

تمارين:- جد تكامل $\int_{-1}^1 |x+1|$

١-الدالة مستمرة على الفترة $[-1.1]$ ولها قاعدتان:-

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \to x+1 \ge 0 \quad \forall\ x \ge -1 \\ -(x+1) = -x-1 & \to x+1 < 0 \quad \forall\ x < -1 \end{cases}$$

٢-الحد الفاصل لا يؤثر على الدالة وتقع الفترة يمينه يعني ناخذ بس دالة اليمين الفوك الموجبة زين.

$x=-1 \ \in [-1.1]$

$$\int_{-1}^1 |x+1|\,dx = \int_1^1 x+1\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^1$$ نعوض

$$= \left[\left(\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right)\right] \quad = \left[\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right] = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ملاحظة: -اذا توفرت ذن الشروط الثلاثة بسؤال ينحل مثل القيمة المطلقة (هذن حساسات من هسه انتبه عليهن)

١-تكامل محدد ٢-جذر تربيعي ٣-داخل الجذر مربع حدانية. بحيث تحلله وراح يختصر مع الجذر بعدين نضع ±

ثم نطبق عليه خطوات القيمة المطلقة.

اثرائي: جد تكامل $\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2 - 2x + 1}\, dx$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{(x-1)(x-1)}\, dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{(x-1)^2}\, dx = \int_{-2}^{2} |x-1|\, dx$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \forall\ x \ge 1 \\ -(x-1) = 1-x & \forall\ x < 1 \end{cases}$$

٢-الحد الفاصل راح يقسم الفترة الى فترتين يمين ويسار. $x = 1 \in [-2.2]$

نعوض كل فترة $\int_{-2}^{2} |x-1|\, dx = \int_{-2}^{1} 1-x\, dx + \int_{1}^{2} x-1\, dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{2}$

$$= \left[\left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(-2 - \frac{(-2)^2}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{(2)^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - (-2-2)\right] + \left[(0) - (\frac{1}{2} - 1)\right] = \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2} = 1 + 4 = 5$$

اثرائي: جد تكامل $\int_{0}^{1} \sqrt{x^2 + 10x + 25}\, dx$

$$= \int_{0}^{1} \sqrt{(x+5)(x+5)}\, dx = \int_{0}^{1} \sqrt{(x+5)^2}\, dx = \int_{0}^{1} |x+5|\, dx$$

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \forall\ x \ge -5 \\ -(x+5) = -5-x & \forall\ x < -5 \end{cases}$$

-الحد الفاصل لا ينتمي للفترة ويقع خارجها. تقع الفترة يمين الحد الفاصل لذلك ناخذ دالة اليمين فقط.

$x = -5 \notin [0, 1]$

نعوض كل فترة $\int_{0}^{1} |x+5|\, dx = \int_{0}^{1} x+5\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 5x\right]_{0}^{1}$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} + 5(1)\right) - (0)\right] = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$$

الدالة المجزئة الى شطرين

نباوع على الدالتين وهنا الحد الفاصل (بهذا الموضوع هو ينطيه بالسؤال) اذا الحد الفاصل بنص الفترة الحل يكون كالتالي:

أ-نثبت ان الدالة مستمرة شلون:-

-نعوض الحد الفاصل بالدالة الي تحتوي علامة مساواة مع الاكبر او الاصغر.

-نحدد دالة اليمين ودالة اليسار ونجد الغاية عندما تقترب نحو العدد الفاصل لهما ولازم يطلعون متساوين.

-نتأكد من ان ناتج الخطوة الاولى والثانية متساويين.

ب-إذا تحققت الشروط الثلاثة فان الدالة مستمرة ونروح نطلع التكامل حسب التالي

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c \text{يسار} dx + \int_c^b \text{يمين} dx$$

ج-واذا انتفى شرط من الشروط الثلاثة نكول ليست مستمرة ولا يوجد تكامل للدالة.

٢-اذا العدد الفاصل خارج الفترة او احد ارقام الفترة. لا نثبت الاستمرارية ونشوف الفترة وين صايرة بيا جهة ونأخذ الدالة الي بتلك الجهة ونطلع التكامل الها وخلاص.

اذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 3 \\ 6 & x < 3 \end{cases}$ *فجد تكامل* $\int_1^4 f(x)dx$

توضيح [باوع الحد الفاصل هو ٣ معطى وام اليمين الفوك وهي الي بيها علامة يساوي والجوى يسار].

الحل:-

$x = 3 \in [1.4]$

نثبت الاستمرارية عند x=3

$1 - f(3) = 2(3) = 6$ (معرفة)

$$2 - \lim_{x\to3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to3^+} 2x = 2(3) = 6 = L_1 \\ \lim_{x\to3^-} 6 = 6 = L_2 \end{cases}$$

$L_1 = L_2$ *اذن الغاية موجودة.*

$3 - f(3) = \lim_{x\to3} f(x)$

اذن الدالة مستمرة على الفترة المعطاة عند x=3

نعوض كل فترة

$$\int_1^4 f(x)\, dx = \int_1^3 6\, dx + \int_3^4 2x\, dx = [6x]_1^3 + [x^2]_3^4$$

$= [18 - 6] + [16 - 9] = 12 + 19$

اذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ فجد تكامل $\int_{-1}^{3} f(x)dx$

الحل:-

$x = 0 \in [-1.3]$

$1 - f(0) = 3(0)^2 = 0$

$$2 - \lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1 \\ \lim_{x\to 0^-} 2x = 2.0 = 0 \quad = L_2 \end{cases}$$

$L_1 = L_2$ اذن الغاية موجودة .

$3 - f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

اذن الدالة مستمرة على الفترة المعطاة عند x=0

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} 2xdx}_{\text{يسار}} + \underbrace{\int_{0}^{3} 3x^2dx}_{\text{يمين}} = [x^2]_{-1}^{0} + [x^3]_0^3$$ نعوض كل فترة

$= [0 - (1)] + [27 - 0] = -1 + 27 = 26$

اذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 1 \\ 3 & x < 1 \end{cases}$ فجد تكامل $\int_{0}^{5} f(x)dx$

توضيح[باوع الحد الفاصل =1 معطى وام اليمين الفوك وهي الي بيها علامة يساوي والجوه يسار].

الحل: -نثبت الاستمرارية

$x = 1 \in [0.5]$

$1 - f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$$2 - \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} 3 = 3 \quad = L_2 \end{cases}$$

$L_1 = L_2$ اذن الغاية موجودة.

$3 - f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

اذن الدالة مستمرة على الفترة المعطاة عند x=0

$$\int_{0}^{5} f(x)dx = \underbrace{\int_{0}^{1} 3dx}_{\text{يسار}} + \underbrace{\int_{1}^{5} 2x + 1 \;\; dx}_{\text{يمين}} = [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$ نعوض كل فترة

$= [3 - (0)] + [(25 + 5) - (1 + 1)] = 3 + 30 - 2 = 31$

مثال اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x - 3x^2 & \forall\ x \le 2 \\ x^2 + 4x & \forall\ x > 2 \end{cases}$ **فجد** $\int_{-2}^{0} f(x)$

الحد الفاصل خارج الفترة. لا نثبت الاستمرارية والفترة تقع يسار الحد الفاصل. ناخذ دالة اليسار الي هي الفوق.

$$\int_{-2}^{0} 2x - 3x^2 dx = [x^2 - x^3]_{-2}^{0} = (0) - (4 + 8) = -12$$

اللوغاريتم الطبيعي

ومشتقة الدالة اللوغاريتمية هي: -

$$\frac{d}{dx} ln\,(\text{دالة معينة}) = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{هنا نزل الدالة كماهي}}$$

قوانين تحويلات تفييدك

$$ln(x.y) = lnx + lny \qquad ln\left(\frac{y}{x}\right) = lny - lnx \qquad lnx^n = n\,lnx \qquad ln1 = 0$$

- **اذا كانت الدالة ضرب عدة دوال تنحل باخذ ln للطرفين وتحويل الضرب لجمع ثم نشتق.**
- **اذا كانت الدالة مرفوعة لاس دالة ناخذ ln للطرفين ونطبق التحويلات ثم نشتق. نطبق ضرب دالتين.**

جد $\frac{dy}{dx}$

مثال -1- اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

================================

a) $y = \ln 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

---

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

يفضل ان نبسط ثم نشتق بتحويل القسمة الى طرح حسب خاصية ln

$$y = lnx - ln2$$

هسه نشتق

$$y' = \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x}$$

c) $y = \ln(x^2)$

ننزل الاس وبعدين نشتق.

$$y = 2lnx$$
$$y' = \frac{1}{x}$$

---

f) $y = \ln(2 - \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sinx}{2 - cosx}$$

---

e) $y = x^2 \ln|x|$

نشتق ضرب دالتين.

$$y' = x^2 \cdot \frac{1}{x} + \ln|x| \times 2x$$
$$y' = x + 2x\ln|x|$$

معلومات مهمة

$\ln x^n = n \ln x$

لكن ديربالك تسوي هاي الفقرة كفر بالرياضيات

$(\ln x)^n \neq n \ln x$

$\ln 1 = 0 \qquad \ln 0 = \infty$

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

ننزل الاس حسب الخاصية ثم نوزع ln ع القسمة ومن ثم نشتق .

$y = 3\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 3(\ln 1 - \ln x)$

هسه نشتق:-

$y' = 3\left(0 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$

---

d) $y = (\ln x)^2$

كفر اذا تنزل الاس. هنا نشتق بطريقة القوس.

$y' = 2(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$

---

f) $y = \ln(\tan^2 x)$

هنا ننزل الاس ثم نشتق

$y = 2\ln(\tan x) = 2\left(\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right)$

بالسادس ماكو مشتقة ضرب 3 دوال او اكثر واذا لكيناهن

ناخذ ln للطرفين فيتحولن الى جمع ثم نشتق كل طرف بوحدة .

$y = x \sin x \cos x$ ln

$\ln y = \ln(x \sin x \cos x)$

$\ln y = \ln x + \ln \sin x + \ln \cos x$

هسه نشتق

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

نبسط بالسوك

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \cot x + \tan x \qquad \times y$

$y' = \frac{y}{x} + y\cot x + y\tan x$

$y \ln \sin x = \cos^2 3x$

هاي اشتقاق ضمني بالطرف الايسر وضرب دالتين نعتبرهن. اما الطرف الايمن نطبق القاعدة السابعة للدوال المثلثية.

$\underbrace{y}_{\text{الاولى}} \underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{\ln \sin x}_{\text{الثانية}} \underbrace{y'}_{\text{مشتقة الاولى}}$

$= 2\cos 3x \times -\sin 3x \;.3$

ما يصير تبقى هيج لازم نبسطها.

$y' \ln \sin x = -6\sin 3x \cos 3x - y\cot x$

نجد المشتقة بشكل نهائي

$y' = \frac{-6\sin 3x \cos 3x - y\cot x}{\ln \sin x}$

$y = \ln(x \sin x)$

بيناتهم ضرب .نطبق القانون وبعدين نشتق .

$y = \ln x + \ln \sin x$

هسه نشتق

$y' = \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \cot x$

اذا لكيت دالة مرفوعة لاس دالة همينا .ما موجودة بالسادس مشتقتها . ندخل ln وينزل الاس ونشتق .

$y = x^x$

ناخذ ln للطرفين.

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

هسه نشتق الطرف الايمن ضمني والايسر ضرب دالتين:-

$\frac{y'}{y} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \;.1$ نبسط

$\frac{y'}{y} = 1 + \ln x \qquad \times y$

$y' = y + y\ln x$

تكامل بطريقة اللوغارتيم

-ينطيك تكامل قسمة دالتين ويطلب تكامل. تجي شتسوي؟ تباوع ع المقام وتطبق عليه قواعد التكامل مالت القسمة اذا حد واحد يتوزع

واذا جذر او قوس مرفوع لاس يرفع او تحليل واختصار.

اذا فشل بذني كلهن شتسوي؟

تعتبر المقام دالة. والبسط مشتقة اله وتكامل بطريقة اللوغارتيم حسب العلاقة:-

$$\int \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{دالة معينة}} dx = ln|\text{دالة المقام}| + c$$

ليش نخلي قيمة مطلقة بعد كل ln ؟ لان لا يوجد ln لمقدار سالب او كمية سالبة . ومن تكامل محدد لازم تعوض وتطلع ناتج . بس التكامل غير المحدد ضع c+ ديربالك تنسى. هذا الموضوع كلش مهم بالوزاري

$$\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه ، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط . والتحليل ماكو . جا وين اروح ؟ نكول :-

المقام=x+1 ومشتقته=1 وهي موجودة في البسط . اذن نكامل قبل .

$$\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx = [ln|x+1|]_0^3 = [ln|3+1| - ln|0+1|] = ln4 - ln1 = ln4 - 0 = ln4$$

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx =$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه ، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط . والتحليل ماكو . جا وين اروح ؟ نكول :-

المقام= x^2+9 ومشتقته =2x وهي موجودة في البسط . اذن نكامل قبل .

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx = [ln|x^2+9|]_0^4 = [ln|16+9| - ln|0+9|] = ln25 - ln9 = ln\frac{25}{9}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

ليش هذا مو حد واحد ؟ لان من ارفع المقام يصير اسه=1- ومن اكامله يصبح ناتج التكامل غير معرف . جرب وشوف .

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط. والتحليل ماكو. جا وين اروح؟ نكول:-

المقام= x^3+4x+1 ومشتقته= $3x^2+4$ وهي موجودة في البسط . اذن نكامل قبل.

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx = [ln|x^3+4x+1|]_0^1 = [ln|1^3+4(1)+1| - ln|0^3+4(0)+1|]$$

$$= ln6 - ln1 = ln6$$

$$\int \frac{6x}{3x^2+5}dx$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه ، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط . والتحليل ماكو . جا وين اروح ؟ نكول :-

المقام= $3x^2+5$ ومشتقته=6x بيها نقص 6 نضعها ونضع بالخارج مقلوبها ثم نكامل .

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+5}dx = \frac{1}{6}ln|3x^2+5| + c$$

$$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+9}dx$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه ، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط . والتحليل اكو بس يبقى مقدار بالمقام لذلك . نكول

المقام= x^2-6x+9 ومشتقته=2x-6 بيها نقص 2 نضربها ونضع بالخارج مقلوبها ثم نكامل .

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+9}dx = \frac{1}{2}ln|x^2-6x+9| + c = \frac{1}{2}ln|(x-3)(x-3)| + c = \frac{1}{2}ln|(x-3)^2| + c$$
$$= ln|x-3| + c$$

او بطريقة التحليل. نحلل ونختصر ويصير البسط مشتقة للمقام.

$$= \int \frac{x-3}{(x-3)(x-3)}dx = \int \frac{1}{x-3}dx = ln|x-3| + c$$

$$\int \frac{ln}{x}dx$$

ماكو تكامل دالة بيها ln . واذا لكيت هيج فكر بالقواعد القديمة مثلا تعتبر ln دالة مرفوعة لاس ولازم توفر مشتقتها . يعني بالضبط تعتبرها مثل قاعدة 11 مالت الدوال المثلثية . هنا راح اسحب المقام على جهة ويصير مشتقة lnx .

$$= \int \underbrace{(lnx)^1}_{\text{قوس}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{مشتقته}} dx = \frac{1}{2}(lnx)^2 + c$$

$$\int \frac{1}{xlnx}dx$$

$$= \int \frac{1}{lnx} \quad \frac{1}{x} dx = \int \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\text{مشتقة المقام}}}{\underbrace{lnx}_{\text{مقام}}} = ln(ln|x|) + c$$

$$\int tanxdx = \int \frac{sinx}{cosx} dx = \text{نوفر} = -\int \frac{-sinx}{cosx} dx = -ln|cosx| + c$$

$$\int cotxdx = \int \frac{cosx}{sinx} dx = ln|sinx| + c$$

$$\int secx\ dx = \text{بالمنسب}$$

$$\int secx \quad \times \frac{secx + tanx}{secx + tanx} \ dx = \int \frac{sec^2x + secx\ tanx}{secx + tanx} dx = ln|secx + tanx| + c$$

لان البسط صار مشتقة المقام . ومثل هذا الحل يكون ل cscx .

وطبعا ذن الاربعة قوانين من القواعد العشرة كاتبهن بالبداية وهذا الاثبات مالتهن بحيث لما اخذنا ln ياالله استخدمتهن .

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x}{2 + tanx} dx$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه ، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط . والتحليل ماكو

المقام $= 2 + tanx$ ومشتقته $= sec^2x$ وهي كاملة موجودة اذن نكامل .

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x}{2 + tanx} dx = [ln|2 + tanx|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = ln\left|2 + tan\frac{\pi}{4}\right| - ln\left|2 + tan - \frac{\pi}{4}\right|$$

$$= ln\left|2 + tan\frac{\pi}{4}\right| - ln\left|2 - tan\frac{\pi}{4}\right| = ln|2 + 1| - ln|2 - 1| = ln3 - ln1 = ln3$$

$$\int \frac{1 + cosx}{x + sin} dx$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه ، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط . والتحليل ماكو

المقام $= x + sinx$ ومشتقته $= 1 + cosx$ وهي كاملة موجودة اذن نكامل .

$$= [ln|x + sinx|] + c$$

$$\int \frac{sec^2x-1}{tanx-x}\,dx$$

شوف هسه المقام لا حد واوزعه ، ولا قوس او جذر حتى ارفعه للبسط . والتحليل ماكو

المقام= $tanx-x$ ومشتقته= sec^2x-1 وهي موجودة بس نحول البسط بقوانين التحويلات .

$$\int \frac{sec^2x-1}{tanx-x}\,dx = [ln|tanx-x|]+c$$

ملاحظة :-اذا لكيت الحالة الثالثة مالت $tan^n x$ او $cot^n x$ هاي نسحب اس = 2 ثم بعد ذلك نحول ونضرب ويطلع بيها ln

$$\int tan^3x\,dx = \int tanx\,tan^2x\,dx = \int tanx\,(sec^2x-1)dx = \int \underbrace{tanx}_{\text{قوس}}\,\underbrace{sec^2x}_{\text{مشتقة}} - tanx\,dx$$

$$= \int \underbrace{tanx}_{\text{قوس}}\,\underbrace{sec^2x}_{\text{مشتقة}} - \frac{sinx}{cosx}\,dx = \int \underbrace{tanx}_{\text{قوس}}\,\underbrace{sec^2x}_{\text{مشتقة}} + \frac{-sinx}{cosx}\,dx = \frac{1}{2}tan^2x + ln|cosx| + c$$

$$\int cot^3 5x\,dx$$

$$\int cot^3 5x\,dx = \int cot5x\,cot^2 5x\,dx = \int cot5x\,(csc^2 5x-1)dx =$$

$$\int \underbrace{cot5x}_{\text{قوس}}\,\underbrace{csc^2 5x}_{\text{مشتقة}} - cot5x\,dx = \int \underbrace{cot5x}_{\text{قوس}}\,\underbrace{csc^2 5x}_{\text{مشتقة}} - \frac{cos5x}{sin5x}\,dx$$

نحتاج مشتقة القوس سالب ومشتقة الزاوية تحتاج 5 لكل الطرفين. بس السالب للحد الاول فقط نخليه للأول بس .

$$= \int -\underbrace{cot5x}_{\text{قوس}} \quad -\underbrace{csc^2 5x}_{\text{مشتقة}} - \frac{cos5x}{sin5x}\,dx = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}cos^2 5x - ln|sin5x|\right] + c$$

الدالة الاسية

لو كانت لدينا العلاقة التالية

$$u = lny \quad \rightarrow y = ln^{-1}u \quad \rightarrow y = e^{u}$$

الدالة أعلاه تسمى الدالة الاسية حيث $e = 2.718281828 \ldots$ هو ثابت أويلر ماخوذ من اول حرف من اسمه.

لغرض اشتقاقها نطبق

$$\frac{d}{dx}(e^{\text{دالة}}) = (\text{مشتقة الدالة})(e^{\text{دالة}})$$

جد $\frac{dy}{dx}$

$y = e^{tanx}$

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{sec^2x}_{\text{مشتقة الفوق}} \underbrace{e^{tanx}}_{\text{نفسها}} = sec^2x \quad e^{tanx}$

$y = e^{-5x^2+3x+5}$

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(-10x+3)}_{\text{مشتقة الفوق}} \underbrace{e^{-5x^2+3x+5}}_{\text{نفسها}}$

$= (-10x+3) \quad e^{-5x^2+3x+5}$

$y = xe^{3x-lnx}$

تريد ضرب دالتين تريد تبسط وبعدين تشتق .راح احل الطريقتين .

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x}_{\text{الاولى}} \underbrace{\left(3-\frac{1}{x}\right)e^{3x-lnx}}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{e^{3x-lnx}}_{\text{الثانية}} \underbrace{1}_{\text{مشتقة الاولى}}$

$= 3xe^{3x-lnx} - e^{3x-lnx} + e^{3x-lnx}$

$= 3xe^{3x-lnx}$

الطريقة الثانية نوزع e على الاس حسب القاعدة التالية:-

$e^{a\pm b} = e^{a} \; e^{\pm b}$

وخلي ابالك هاي القواعد كلش مهمة:-

$e^{ln\,u} = u \qquad lne = 1 \qquad lne^{u} = u$

$e^{\pm n ln\,u} = e^{ln\,u^{\pm n}} = u^{\pm n}$

$y = x^2 e^x$

نعتبرهم ضرب دالتين.

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x^2}_{\text{الاولى}} \underbrace{1e^x}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{e^x}_{\text{الثانية}} \underbrace{2x}_{\text{مشتقة الاولى}} = x^2e^x + 2xe^x$

$y = lnx \,.\, e^x$

ضرب دالتين هذا

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{lnx}_{\text{الاولى}} \underbrace{1e^x}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{e^x}_{\text{الثانية}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{مشتقة الاولى}} = lnx\, e^x + \frac{e^x}{x}$

$y = sin(xe^x)$

$y' = \underbrace{cos(xe^x)}_{\text{مشتقة الدالة}} \underbrace{\left[\underbrace{x}_{\text{الاولى}} \underbrace{1e^x}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{e^x}_{\text{الثانية}} \underbrace{1}_{\text{مشتقة الاولى}}\right]}_{\text{مشتقة الزاوية}}$

$y' = (xe^x + e^x)cos(xe^x)$

$y = e^{x^2} \, ln|2x|$

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{x^2}}_{\text{الاولى}} \underbrace{\frac{2}{2x}}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{ln|2x|}_{\text{الثانية}} \underbrace{e^{x^2}\, 2x}_{\text{مشتقة الاولى}}$

$= \frac{e^{x^2}}{x} + 2xe^{x^2} \, ln|2x|$

$y = cose^{\pi x}$

$y' = -\underbrace{sin(e^{\pi x})}_{\text{مشتقة الدالة}} \underbrace{[\pi e^{\pi x}]}_{\text{مشتقة الزاوية}}$

$y' = -\pi e^{\pi x} \, sine^{\pi x}$

هسه راح ابسط السؤال بذن القواعد وبعدين اشتق الناتج.

$$y = x\, e^{3x}\, e^{-\ln x} = x e^{3x} e^{\ln x^{-1}}$$

$$= x e^{3x} x^{-1} = x e^{3x} \frac{1}{x} = e^{3x}$$

هسه نشتق الناتج النهائي: -

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الفوك}} \underbrace{e^{3x}}_{\text{نفسها}} = 3e^{3x}$$

واجبات جد y', y'' ؟ لكل مما يأتي.

$y = x\, e^{2\ln x}$

$y = \ln\sin x\ e^{\tan x}$

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{x} - e^{-x})(e^{x} - e^{-x}) - (e^{x} + e^{-x})(e^{x} + e^{-x})}{(e^{x} - e^{-x})^2} = \text{نضربهم}$$

$$= \frac{[e^{x} e^{x} - e^{x} e^{-x} - e^{x} e^{-x} + e^{-x} e^{-x}] - [e^{x} e^{x} + e^{x} e^{-x} + e^{x} e^{-x} + e^{-x} e^{-x}]}{(e^{x} - e^{-x})^2}$$

عند الضرب تجمع الاسس. وخلي اابالك

$$e^{0} = 1$$

$$= \frac{[e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x}] - [e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x}]}{(e^{x} - e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^{x} - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{-2 - 2}{(e^{x} - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^{x} - e^{-x})^2}$$

تكامل الدالة الاسية

- ❖ نحدد الدالة الي فوك ال (e).
- ❖ لازم مشتقة الدالة موجودة قرب الدالة الاسية كاملة واذا بيها نقص ما يصير لازم نبحث عن الطرق لإكمالها.

$$\int \underbrace{e^{\text{دالة}}}_{\text{الاسية}} \quad \underbrace{u'}_{\text{مشتقة دالتها}} \quad dx = e^{\text{دالة}} + c$$

جد التكاملات التالية :-

مهم كتير بس توفر مشتقة المقدار الفوك وبعدين تحذف كلشيء وتعوف e :-

$$\int_a^b \underbrace{e^{\text{دالة}}}_{\text{الاسية}} \underbrace{u'}_{\text{مشتقة دالتها}} dx = \left[\underbrace{e^{\text{دالة}}}_{\text{الاسية}}\right]_a^b$$

$1)\ \int_{ln3}^{ln5} e^{2x}\, dx$

دالة e =2x ومشتقتها =2 وهي غير موجودة. ندبرها ونكامل.

$$= \frac{1}{2}\int_{ln3}^{ln5} \underbrace{e^{2x}}_{\text{الاسية}} \underbrace{2}_{\text{مشتقة دالتها}} dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{ln3}^{ln5} = \frac{1}{2}[e^{2ln5} - e^{2ln3}] = \frac{1}{2}[e^{ln5^2} - e^{ln3^2}] = \frac{1}{2}[5^2 - 3^2]$$

$$= \frac{1}{2}[25 - 9] = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

$2)\ \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

دالة e = $\sqrt{x}$ ومشتقتها = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ وهي موجودة بس تحتاج 2 بالمقام. ندبرها ونكامل.

$$= 2\int_1^4 \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{\text{الاسية}} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{مشتقة دالتها}} dx = 2[e^{\sqrt{x}}]_1^4 = [e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}] = 2[e^2 - e^1]$$

$3)\ \int_0^{ln2} e^{-x} dx$

دالة e =-x ومشتقتها =-1 وهي غير موجودة. ندبرها ونكامل.

$$= -\int_0^{ln2} \underbrace{e^{-x}}_{\text{الاسية}} \underbrace{-1}_{\text{مشتقة دالتها}} dx = -[e^{-x}]_0^{ln3} = -[e^{-ln2} - e^0] = -[e^{ln2^{-1}} - 1] = -[2^{-1} - 1]$$

$$= -[2^{-1} - 1] = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx} sinxdx$

دالة e =cosx ومشتقتها =-sinx وهي موجودة بس عوزها سالب. ندبره ونكامل.

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{\cos x}}_{\text{الاسية}} \underbrace{-\sin x}_{\text{مشتقة دالتها}} \; dx = -[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right] = -[e^0 - e^1] = -[1 - e^1]$$

$$= e - 1$$

---

5) $\int_0^1 [1+e^x]^2 e^x \, dx$

هاي دالة قوس مرفوعة لاس وخارجها مشتقة داخل القوس كاملة مرتبة مجكنمة.

$$= \int_0^1 \underbrace{[1+e^x]^2}_{\text{القوس}} \underbrace{e^x}_{\text{مشتقة داله}} \; dx = \frac{1}{3}[[1+e^x]^3]_0^1 = \frac{1}{3}[[1+e^1]^3 - [1+e^0]^3]$$

$$= \frac{1}{3}[(1+e)^3 - 2^3] == \frac{1}{3}[(1+e)^3 - 8] = \text{يترك هكذا}$$

---

6) $\int sec^2 3x \, e^{tan3x} dx$

دالة $tan3x$=e ومشتقتها =3 $sec^2 3x$ وهي موجودة بس عوزها 3 . ندبره ونكامل.

$$= \frac{1}{3}\int \underbrace{e^{tan3x}}_{\text{الاسية}} \underbrace{sec^2 3x \quad 3}_{\text{مشتقة دالتها}} \; dx = \frac{1}{3}e^{tan3x} + c$$

---

7) $\int_1^2 x \, e^{-lnx} \, dx$

E مع ln ما تشتغل لازم نبسطهم ونتخلص منهم.

$$= \int_1^2 x \, e^{lnx^{-1}} \, dx = \int_1^2 x.x^{-1} \, dx = \int_1^2 x\frac{1}{x} \, dx = \int_1^2 dx == [x]_1^2 = [2-1] = 1$$

---

8) $\int \sqrt{e^{2x-4}} \, dx$

ملاحظة تخص الاسس $\mathrm{e}^{au} = [e^u]^a$ يعني العدد يتحول اس للاس . بهذا السؤال عندي جذر وماكو مشتقة داخل الجذر لذلك راح نبسط حسب التالي: -

$$= \int \sqrt{e^{2(x-2)}} \, dx = \int [(e^{x-2})^2]^{\frac{1}{2}} dx = \int e^{x-2} \, dx = \int \underbrace{e^{x-2}}_{\text{الاسية}} \quad \underbrace{1}_{\text{مشتقة دالتها}} \quad dx = e^{x-2} + c$$

$$9)\ \int e^{x^3+2lnx}\,dx$$

ماكو مشتقة الدالة لذلك بيه فكرة وهي التبسيط حسب قواعد e .

$$= \int e^{x^3}\ e^{2lnx}\,dx = \int e^{x^3}\ e^{lnx^2}\,dx = \text{نحذف} = \int e^{x^3}\ x^2\,dx$$

هسه نوفر مشتقة دالة e .

$$= \frac{1}{3}\int \underbrace{e^{x^3}}\ \underbrace{3x^2}_{\text{مشتقة دالتها الاسية}}\ dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

$$10)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{sinx}}\,dx$$

هنا نكامل حسب النظام القديم نرفع المقام والبسط يعتبر مشتقة إله.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^{-\frac{1}{2}} cosx\,dx = 2\left[(sinx)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sqrt{sinx}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sqrt{sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{sin\frac{\pi}{6}}\right] = 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

$$11)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}$$

عندي جذر ارفعه للبسط والمشتقة موجودة كاملة . بس باوع زين .

$$= \int \underbrace{(1+lnx)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{القوس}}\ \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{مشتقة دالتها}}\ dx = 2(1+lnx)^{\frac{1}{2}} + c$$

الدالة الاسية الثابتة $y = a^{\text{دالة}}$

$$y = (\text{رقم موجب})^{\text{دالة معينة}} \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow y = a^{\text{دالة}}$$

$$\frac{d}{dx} a^{\text{دالة}} = a^{\text{دالة}} \, (\text{مشتقة الدالة}) \, ln\, a$$

ندرس في السادس مشتقتها فقط.

مثال – 5- جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = 3^{2x-5}$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}\ (2)\ ln\ 3 = 2ln3\ \ 3^{2x-5}$$

b) $y = 2^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{-x^2}.(-2x)\ ln\ 2 = -2xln2\ .2^{-x^2}$$

a) $y = 3^{2x-5}$

$$\frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}\ (2)\ ln\ 3 = 2ln3\ \ 3^{2x-5}$$

b) $y = 2^{-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{-x^2}.(-2x)\ ln\ 2 = -2xln2\ .2^{-x^2}$$

c) $y = 5^{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\text{sinx}}.(\text{cosx})\ ln\ 5$$

h) $y = 9^{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}}.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ ln\ 9 = \frac{ln9}{2\sqrt{x}} 9^{\sqrt{x}}$$

$y = 7^{\frac{-x}{4}}$

$$\frac{dy}{dx} = 7^{\frac{-x}{4}}.\left(\frac{-1}{4}\right)\ ln\ 7 \quad = \frac{-ln7}{4} \quad 7^{\frac{-x}{4}}$$

$$y = \frac{3^{2x}}{ln9}$$

شويه تبسيطات وكذا:-

$$y = \frac{1}{ln9} 3^{2x}$$

$$y' = \frac{1}{ln9} \quad 3^{2x} \qquad 2\ \ ln3$$

$$= \frac{1}{ln9}\ 3^{2x}\ \ ln3^2$$

$$= \frac{1}{ln9}\ 3^{2x}\ \ ln9 = 3^{2x}$$

حلول تمارين 4-5

اثبت ان

$$a)\ \int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$$

ناخذ الطرف الايسر.قسمة دالتين والمقام حد واحد يرفع للبسط:-

$$lHS = \int_1^8 \left[x^{\frac{1}{3}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \quad x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

صارت دالة مرفوعة لاس وخارج القوس مشتقة داخل القوس.

مشتقة داخل القوس المفروض تكون $=\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)$.والي موجود عندي بس $=\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)$ لذلك نحتاج الى $\left(\frac{1}{3}\right)$ نخلي بالمشتقة هذا المقدار ونضع مقلوبه خارج التكامل.

$$lHS = 3\int_1^8 \left[x^{\frac{1}{3}} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx \ = 3 \quad \frac{2}{3}\left[\left[x^{\frac{1}{3}} - 1\right]^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = 2\left[\left[\sqrt[3]{8}-1\right]^{\frac{3}{2}} - \left[\sqrt[3]{1}-1\right]^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2\left[[2-1]^{\frac{3}{2}} - [1-1]^{\frac{3}{2}}\right] = 2\left[[1]^{\frac{3}{2}} - 0\right] = 2\,(1) = 2$$

$$b)\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = 30$$

ناخذ الطرف الايسر:-

١-الدالة مستمرة على الفترة $[-2.4]$ ولها قاعدتان:-

$$f(x) = \begin{cases} 3x-6 & \rightarrow 3x-6 \geq 0 \quad \rightarrow 3x \geq 6 \quad \forall\ \ x \geq 2 \\ -(3x-6) = 6-3x & \rightarrow 3x-6 < 0 \quad \rightarrow 3x < 6 \quad \forall\ \ x < 2 \end{cases}$$

٢-الحد الفاصل راح يقسم الفترة الى فترتين يمين ويسار.

$3x-6=0 \qquad x=2\ \in [-2.4]$

$$\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = \int_{-2}^{2} 6-3x\,dx + \int_{2}^{4} 3x-6\,dx$$

$$= \left[6x - \frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{2}^{4}$$ نعوض كل فترة

$$= [(12-6)-(-12-6)] \qquad + [(24-24)-(6-12)] = 6+18+0+6 = 30 = RHS$$

جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

هنا نكامل كل مقدار بوحده لكلا الطرفين .الايسر تكامل عادي والايمن قواعد عشرة .

$$\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right]_1^a = 2[tanx]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{2}1^2+\frac{1}{2}1\right)\right] = 2\left[\left(tan\frac{\pi}{4}\right)-(tan0)\right]$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] = 2[(1)-(0)] \qquad \times 2$$

$a^2+a-2=4$ نصفرها $a^2+a-2-4=0$ $\quad a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

$a+3=0 \qquad a=-3$ *اما*

$a-2=0 \qquad a=2$ *او*

لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) فجد $\int_1^3 f(x)dx$

خل نفسر السؤال .مطلوب تكامل بس المشكلة انو الدالة بيها مجهول هو k وما نكدر نكامل الا لما نعرف قيمة المجهول . هنا نرجع للملاحظات في موضوع ايجاد الثوابت .منطي قيمة y من النهاية الصغرى .

النهاية الصغرى هي (x,-5) نجد x باشتقاق الدالة .

$f'(x)=2x+2 \qquad f'(x)=0 \qquad 2x+2=0 \qquad 2x=-2 \qquad x=-1$

اذن النقطة هي (-1,-5)

اشارة $f'(x)$	$x<-1$	$x=-1$	$x>-1$
	- - - - - - - -		+ + + + + + + +

توجد نهاية صغرى . وهي تنتمي للدالة تحقق معادلتها نعوضها لنجد قيمة k .

$-5=(-1)^2+2(-1)+k \qquad -5=1-2+k \qquad k=-5+1=-4$

$$\int_1^3 x^2+2x-4\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_1^3 = \left[(9+9-12)-\left(\frac{1}{3}+1-4\right)\right] = 6+3-\frac{1}{3}$$

$$= 9-\frac{1}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

٢٠١٥-د٣:-اذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب $(a.b)$ جد القيمة العددية للمقدار
$\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$

شنو معنى هذا السؤال؟ يريد ناتج تكامل بس حدود التكامل هن قيم نقطة الانقلاب. ولازم نكامل المشتقة والمشتقة الثانية.

هسه لازم نطلع نقطة الانقلاب حسب التفاضل.

$y' = 3(x-3)^2 \qquad y'' = 6(x-3) \qquad y'' = 0 \qquad 6(x-3) = 0 \quad \div 6$

$x - 3 = 0 \qquad x = 3$ نجد قيمة y

$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 0 + 1 = 1$

اذن النقطة نقطة انقلاب $(3,1)$

اشارة $f''(x)$	$x<3$	$x=3$	$x>3$
	- - - - - - - -	•	+ + + + + + +
	تحدب		تقعر

(ملاحظة من تطلع نقطة نهاية او انقلاب لازم تتأكد منها على خط الاعداد).

هسه نجد التكامل بعدما توفرت كافة المعلومات. طبعا راح يصير التكامل قوس مرفوع لاس ومشتقته بره.

$a = 3 \qquad b = 1 \qquad f' = 3(x-3)^2 \qquad f'' = 6(x-3)$

$$\int_0^1 3(x-3)^2\,dx - \int_0^3 6(x-3)dx = [(x-3)^3]_0^1 - 3[(x-3)^2]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)^3] \qquad - 3[(3-3)^2 - (0-3)^2]$$

$$= -8 - (-27) - 3[0-9] = -8 + 27 + 27 = 46$$

٢٠١٦-د١:-$f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2.6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x)+3]\,dx = 32$ جد $\int_{-2}^1 f(x)dx$

هنا منطي ٣ حدود للتكامل يعني نجزء التكامل الى جزئين

$$\underbrace{\int_{-2}^6 f(x)\,dx}_{\text{مجهول}} = \underbrace{\int_{-2}^1 f(x)\,dx}_{\text{مطلوب اساسي}} + \underbrace{\int_1^6 f(x)}_{\text{معلوم}}$$

لازم نطلع قيمة المجهول ونرجع نعوضه بالقانون ونطلع قيمة المجهول الاساسي.

منطي معلومة مالت 32 هاي طريقة توزيع التكامل على عدة حدود. ونجد فيما بعد تكامل كل حد.

$$\int_{-2}^6 f(x)\,dx + \int_{-2}^6 3\,dx = 32 \qquad \int_{-2}^6 f(x)\,dx + [3x]_{-2}^6 = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x)\,dx + [(3.6) - (3.(-2))] = 32$$

$$\int_{-2}^6 f(x)\,dx + [18 + 6] = 32 \qquad \int_{-2}^6 f(x)\,dx = 32 - 24 = 8$$

هسه نعوض ونطلع المجهول الرئيسي .

$$\underbrace{8}_{\text{مجهول}} = \underbrace{\int_{-2}^{1} f(x)\,dx}_{\text{مطلوب اساسي}} + 6 \qquad \underbrace{\int_{-2}^{1} f(x)\,dx}_{\text{مطلوب اساسي}} = 8 - 6 = 2$$

$$\underbrace{\int_{-2}^{1} f(x)\,dx}_{\text{مطلوب اساسي}} = 2$$

٢٠١٠-د٢:-اذا كان $\int_1^3 g(x)dx = 2$ و $\int_1^3 f(x)dx = 6$ وكان $\int_1^3 f(x) - g(x) + 4x\,dx$

$$\underbrace{\int_1^3 f(x) - g(x) + 4x\ \ dx}_{\text{مجهول}} = \text{يوززززع} = \underbrace{\int_1^3 f(x)\,dx}_{\text{معلوم}} - \underbrace{\int_1^3 g(x)\,dx}_{\text{معلوم}} + \underbrace{\int_1^3 4x\,dx}_{\text{نكاملها}}$$

$$= 6 - 2 + [2x^2]_1^3 = 4 + [(2\ .3^2) - (2\,.1^2) = 4 + 18 - 2 = 20$$

المساحة المستوية تحت المنحني ومحور السينات

ينطيك دالة وفترة او مستقيمين يمثلن فترة. ويطلب المساحة المغلقة ومحصورة بين محور السينات والفترة والدالة. والحل يكون كالتالي: -

الحالة الاولى: -اذا كانت الدالة عادية

- نجعل الدالة =0 ونحلها ونجد نقاط التقاطع مع محور السينات. واذا قيمة x تنتمي للفترة نجزئ التكامل الى مجموعة فترات بحيث كل فترة تمثل مساحة.
- نكامل الدالة الاصلية ونجد المساحة لكل فترة بمعزل عن الأخرى.
- نجمع المساحات ونضع قيمة مطلقة للمساحة السالبة لان ماكو مساحة سالبة
- اذا ما تنتمي قيمة x للفترة نكامل بس الفترة وتطلع مساحة وحدة.
- مرات ، ما ينطيك الفترة بالسؤال . نجعل الدالة =صفر ونجد قيم x ونرتبهم تصاعديا ونعتبرهن الفترات ونجد المساحة.

مثال١: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات والفترة $[-2.2]$

الحل:-نجعل الدالة=0 لنجد قيم x .

$y = 0 \qquad x^3 - 4x = 0 \qquad x(x^2 - 4) = 0$ اما $x = 0 \in [-2.2]$ يؤثر

$x^2 - 4 = 0 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \mp 2 \in [-2.2]$ او لا يؤثر



راح يصير عدنا مساحتين حسب الفترتين [0.2][-2,0]

$A_t = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-2}^{0} x^3 - 4xdx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0} = \left[(0) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2\right)\right] = -(4-8) = 4$$

$$A = \int_{0}^{2} x^3 - 4xdx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2} = \left[\left(\frac{1}{4}(2)^4 - 2(2)^2\right) - (0)\right] = (4-8) = -4$$

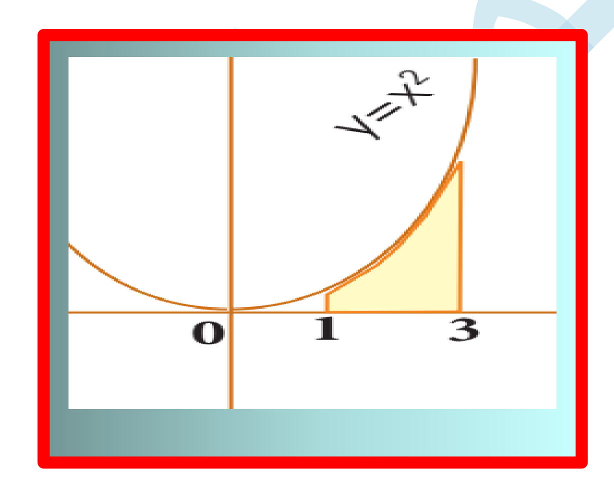
$A_t = A_1 + |A_2| \qquad A_t = 4 + |-4| = 8\, unit^2$

مثال١: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمين x=3, x=1

الحل:- نجعل الدالة=0

$x^2 = 0 \qquad x = 0 \notin [1.3]$

ستكون لدينا مساحة واحدة:-



$$A = \int_{1}^{3} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{3} = \left[\left(\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3\right)\right]$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} unit^2$$

مثال١: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

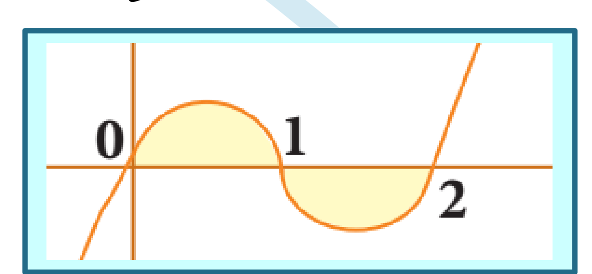
هنا ما منطي حدود التكامل. عادي احنا نحل ونطلع قيم x ونعتبرهم الفترة للمساحة بس نرتبهم تصاعديا.

الخطوة الاولى: - نجعل الدالة =0

$x^3 - 4x^2 + 2x = 0 \qquad x(x - 3x + 2) = 0 \qquad x(x-2)(x-1) = 0$

اما $x = 0$ او $x = 2$ او $x = 1$

الخطوة الثانية :- عدد المساحات اصبح اثنين حسب الفترات [0,1][1,2].



$A_t = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2xdx \ = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1$

$= \left[\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0)\right] = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_1^2 x^3 - 3x^2 + 2xdx \ = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2$

$= \left[\left(\frac{16}{4} - 8 + 4\right) - (\frac{1}{4} - 1 + 1)\right] = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

الخطوة الاخيرة: -نجمع المساحات :-

$A_t = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة

مثال٤: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = x^2 - 1$ ومحور السينات. والفترة $[-2.3]$

الخطوة الاولى نجعل الدالة =0

$x^2 - 1 = 0 \qquad x^2 = 1 \qquad x = \mp 1 \qquad \in [-2.3]$

الخطوة الثانية :-لدينا ثلاثة مساحات حسب الفترات $[-2.-1][-1.1][1.3]$

$A_t = A_1 + A_2 + +A_3$

$A_1 = \int_{-2}^{-1} x^2 - 1dx \ = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} = \left[\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{8}{3} + 2\right)\right] = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2$

$= \frac{7}{3} - 1 = \frac{7-3}{3} = \frac{4}{3}$

$A_2 = \int_{-1}^{1} x^2 - 1dx \ = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = \left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right] = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1$

$= \frac{2}{3} - 2 = \frac{2-6}{3} = -\frac{4}{3}$

$A_3 = \int_1^3 x^2 - 1dx \quad = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^3 = \left[(9-3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = 6 + 1 - \frac{1}{3}$

$= 7 - \frac{1}{3} = \frac{21-1}{3} = \frac{20}{3}$

$A_t = A_1 + A_2 + +A_3 = \frac{4}{3} + \left|-\frac{4}{3}\right| + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$

تمارين: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = x^4 - x$ ومحور السينات والفترة
$x = 1 . \ x = -1$

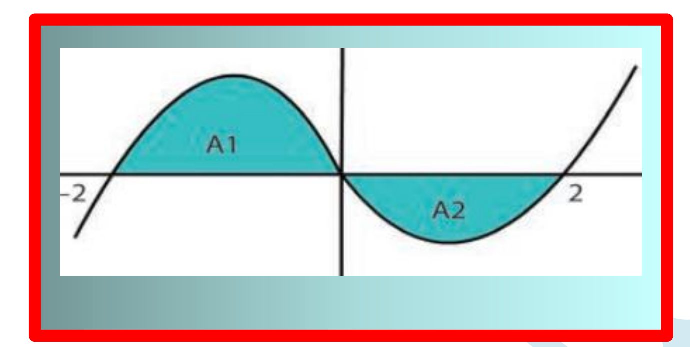
الحل:-نجعل الدالة=0 لنجد قيم x .

$y = 0 \qquad x^4 - x = 0 \qquad x(x^3 - 1) = 0$ اما $x = 0 \in [-1.1]$ يؤثر

$x^3 = 1 \qquad x = 1 \in [-1.1]$ او لا يؤثر $x^3 - 1 = 0$

راح يصير عدنا مساحتين حسب الفترتين [0,1][-1,0]

$A_t = A_1 + A_2$



$A = \int_{-1}^0 x^4 - xdx \quad = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 = \left[(0) - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{1}{2}(-1)^2\right)\right] = -\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2+5}{10} = \frac{7}{10}$

$A = \int_0^1 x^4 - xdx \quad = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left[\left(\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{2}(1)^2\right) - (0)\right] = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2-5}{10} = \frac{-3}{10}$

$A_t = A_1 + |A_2| \qquad A_t = \frac{7}{10} + \left|-\frac{3}{10}\right| = \frac{10}{10} = 1\ unit^2$

تمارين: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = x^4 - 3x^2 - 4$ ومحور السينات والفترة
$[-2.3]$

الخطوة الاولى نجعل الدالة=0

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \qquad (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0 \qquad x^2 - 4 = 0 \qquad x^2 = 4$

$x = \mp 2 \qquad x = -2 \in [-2.3]$ ما تؤثر $\quad x = 2 \in [-2.3]$ تؤثر

الخطوة الثانية :-لدينا ثلاثة مساحات حسب الفترات $A_t = A_1 + A_2[-2.2][2.3]$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} x^4 - 3x^2 - 4dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{2^5}{5} - 2^3 - 8\right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} - (-2)^3 - 4(-2)\right)\right] = \left[\left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right) - \left(-\frac{32}{5} + 8 + 8\right)\right]$$

$$= \left[\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{5} - 16\right] = \frac{64}{5} - 32 = \frac{64 - 160}{5} = -\frac{96}{5}$$

$$A_2 = \int_{2}^{3} x^4 - 3x^2 - 4dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{2}^{3}$$

$$= \left[\left(\frac{3^5}{5} - 3^3 - 12\right) - \left(\frac{(2)^5}{5} - (2)^3 - 4(2)\right)\right] = \left[\left(\frac{243}{5} - 27 - 12\right) - \left(\frac{32}{5} - 8 - 8\right)\right]$$

$$= \left[\frac{243}{5} - 39 - \frac{32}{5} + 16\right] = \frac{211}{5} - 23 = \frac{211 - 115}{5} = \frac{96}{5}$$

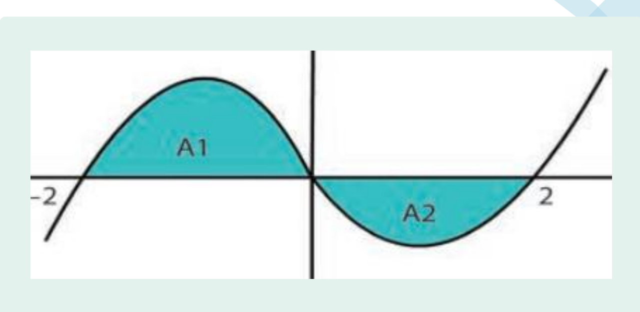
$A_t = |A_1| + A_2$ $\qquad$ $A_t = \left|-\frac{96}{5}\right| + \frac{96}{5} = \frac{192}{5}\ unit^2$

تمارين١: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات.

الحل:-نجعل الدالة=0 لنجد قيم x .

$y = 0 \qquad x^4 - x^2 = 0 \qquad x^2(x^2 - 1) = 0$ اما $x^2 = 0 \qquad x = 0$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm 1$ او $x^2 - 1 = 0$



راح يصير عدنا مساحتين حسب الفترتين [-1,0][0,1]

$A_t = A_1 + A_2$

$$A = \int_{-1}^{0} x^4 - x^2 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} = \left[(0) - \left(\frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{1}{3}(-1)^3\right)\right] = -\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3-5}{15} = \frac{-2}{15}$$

$$A = \int_{0}^{1} x^4 - x^2 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} = \left[\left(\frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{1}{3}(-1)^3\right) - (0)\right] = \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

$A_t = |A_1| + A_2$ $\qquad$ $A_t = \left|-\frac{2}{15}\right| + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ unit^2$

الحالة الثانية اذا كانت الدالة مثلثية ومطلوب مساحة. نطبق نفس الخطوات مالتنا بس هنا مشكلتنا بالزاوية:

١-اذا طلع عندك cosx=0 , sinx=0 شتسوي

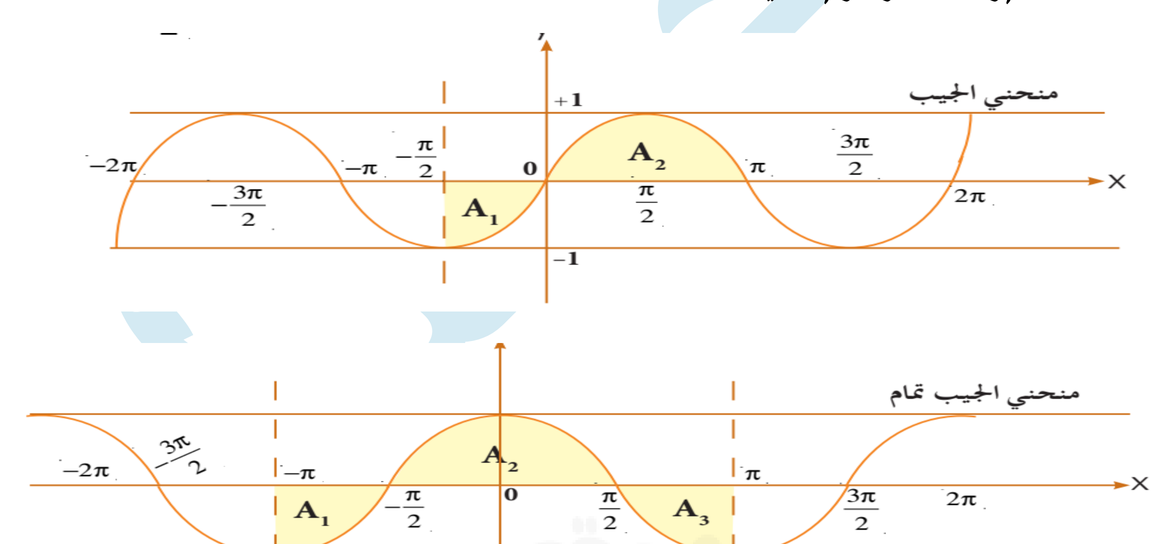
$sinx = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 + n\pi \qquad n = 0.1.2. -1. -2 \dots \dots ..$

$cosx = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{n\pi}{2} \qquad \rightarrow n = 1. -1.3. -3. \dots \dots \dots$

ونعوض كل مرة قيمة n ونقارن مع الفترة بالسؤال ونشوف قيمة x تنتمي حتى نجزئ لو ما تنتمي وهكذا

٢- اذا طلع عندك $cosx =$ رقم . $sinx =$ رقم هنا نعتمد على الزوايا المحورية والخاصة مالتنا القديمة ونطلع قيمة x.

ملاحظة تفهم وتحفظ الرسوم التالية



مثال:- جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = sinx$ ومحور السينات. والفترة $\left[-\frac{\pi}{2}.\pi\right]$

الحل:- نجعل الدالة =0

$\boldsymbol{sinx = 0}$

$\mathbf{x = 0 + n\pi} \qquad \boldsymbol{n = 0.\pm1.\pm2}$

هسه نحلل الزوايا بحيث نعوض قيم n ونشوفها تنتمي لا حتى نجزئ اولا :-

$\therefore \quad n=0 \Rightarrow x= \; 0 \in \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=1 \Rightarrow x= \; \pi \in \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=2 \Rightarrow x= \; 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=-1 \Rightarrow x= \; -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$n=-2 \Rightarrow x= \; -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$

∴ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية : $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[0, \pi\right]$

وبالتالي لدينا مساحتين

$A_T = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sinx \quad dx = -\,[cosx]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\left[cos0 - cos -\frac{\pi}{2}\right] = -[1-0] = -1$

$A_2 = \int_{0}^{\pi} sinx \quad dx = -\,[cosx]_0^{\pi} = -[cos\pi - cos0] = -[-1-1] = 2$

$A_T = |A_1| + A_2 = |-1| + 2 = 1 + 2 = 3$ وحدة مربعة

مثال: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = cosx$ ومحور السينات. والفترة $[-\pi.\pi]$

الحل:- نجعل الدالة =0

$cosx = 0$

$x = \frac{n\pi}{2} \qquad n = \pm1.\pm3.\pm5$ الفرديات بس

هسه نحلل الزوايا بحيث نعوض قيم n ونشوفها تنتمي لا حتى نجزئ اولا :-

$x = \; \frac{\pi}{2} \in [-\pi,\pi]$

$x = \; -\frac{\pi}{2} \in [-\pi,\pi]$

$x = \; \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi,\pi]$

$x = \; -\frac{3\pi}{2} \notin [-\pi,\pi]$

نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية

$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right],\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

وبالتالي لدينا ثلاث مساحات

$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} cosx \quad dx = [sinx]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = \left[sin -\frac{\pi}{2} - sin -\pi\right] = \left[-sin\frac{\pi}{2} + sin\pi\right] = [-1-0] = -1$

$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx \quad dx = [sinx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[sin\frac{\pi}{2} - sin -\frac{\pi}{2}\right] = [1+1] = 2$

$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cosx \quad dx = [sinx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[sin\pi - sin\frac{\pi}{2}\right] = [0-1] = -1$

$A_T = |A_1| + A_2 + |A_3| = |-1| + 2 + |-1| = 4$ وحدة مربعة

ملاحظة:-

- اذا الزاوية مضروبة برقم من تاخذ قيم n اخذ هواي ارقام لان راح تقسم الزاوية على العدد المضروبة به x وتقل قيمتها وتدخل ضمن الفترة وما تدري .
- اذا الفترة بالسؤال موجب اخذ بس الارقام الموجبة .

تمارين١: - جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = sin3x$ **ومحور السينات والفترة** $\left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

الحل:- نجعل الدالة =0 $sin3x = 0$

$3x = 0 + n\pi \qquad n = 0.1.2.3$ فقط الموجب

هسه نحلل الزوايا بحيث نعوض قيم n ونشوفها تنتمي لا حتى نجزئ اولا :-

$n = 0 \qquad 3x = 0 \qquad x = 0 \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

$n = 1 \qquad 3x = \pi \qquad \div 3 \qquad x = \frac{\pi}{3} \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

$n = 2 \qquad 3x = 2\pi \qquad \div 3 \qquad x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

اذن لدينا مساحتين ناتجتين من فترتين هما $\left[\frac{\pi}{3}.\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[0.\frac{\pi}{3}\right]$.

$A_T = A_1 + A_2$

$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin3x \quad dx = -\frac{1}{3}[cos3x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}\left[cos3\ \frac{\pi}{3} - cos0\right]$

$= -\frac{1}{3}[\cos\pi - 1] = -\frac{1}{3}[-1-1] = \frac{1}{3}(2) = \frac{2}{3}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x \quad dx = -\frac{1}{3}[cos3x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\left[cos3\ \frac{\pi}{2} - cos3\ \frac{\pi}{3}\right]$

$$= -\frac{1}{3}\left[\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi\right] = -\frac{1}{3}[0-(-1)] = -\frac{1}{3}$$

$A_T = A_1 + |A_2| = \frac{2}{3} + \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ وحدة مربعة

تمارين: - جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = 2cos^2x - 1$ ومحور السينات. والفترة $\left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

هنا اكو فيكة هو مسويها وهي منطيك قانون جاهز ترجعه لأصله وبعدين تشتغل ع الدالة الجديدة .

الحل: - نجعل الدالة =0

$$y = 2cos^2x - 1 = cos2x$$

$2x = \frac{n\pi}{2} \quad \div 2 \quad \rightarrow x = \frac{n\pi}{4} \quad n = 1.3$ فقط الموجب

هسه نحلل الزوايا بحيث نعوض قيم n ونشوفها تنتمي لا حتى نجزئ اولا :-

$n = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} \in \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

$n = 3 \quad x = \frac{3\pi}{4} \quad \notin \left[0.\frac{\pi}{2}\right]$

اذن لدينا مساحتين ناتجتين من فترتين هما $\left[\frac{\pi}{4}.\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[0.\frac{\pi}{4}\right]$.

$$A_T = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x \ dx = \frac{1}{2}[sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[sin2\ \frac{\pi}{4} - sin0\right] = \frac{1}{2}\left[sin\ \frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos2x \ dx = \frac{1}{2}[sin2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[sin\ \pi - sin\ \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}[0-1] = -\frac{1}{2}$$

$A_T = A_1 + |A_2| = \frac{1}{2} + \left|-\frac{1}{2}\right| = 1$ وحدة مربعة

المساحة المستوية بين منحنيين

هنا المساحة تنحصر بين الدالتين فقط ونحتاج نقاط تقاطع بين الدالتين. وطريقة الحل هي

- نجد دالة جديدة هي ناتج طرح الدالتين وانت بكيفك منو تعتبرها الاولى ومنو الثانية ماكو اشكال.

$y = y_2 - y_1$

- نجعل الدالة الجديدة =0 ونجد قيم x ونقارن مع الفترة. ونفس الحجي القديم نطبقه مالت تنتمي ولا تنتمي ونجزئ او لا.
- اذا الدالة جذرية الافضل تخلي الجذر بوحده حتى تصكه بتربيع وتخلص منه ثم ترجع المقادير وتجد x.
- نكامل الدالة الجديدة حسب الفترات ولا تنسى القيمة المطلقة
- المساحة تساوي $A = \int_a^b y_2 - y_1 \quad dx$.

مثال١ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

الحل:- لا توجد حدود للتكامل نعتبر قيم X الي راح نطلعها هي الفترة.

نجد دالة جديدة.

$y = \sqrt{x} - x \qquad y = 0 \qquad \sqrt{x} - x = 0 \qquad \sqrt{x} = x$ بالتربيع $x = x^2$

$x - x^2 = 0 \qquad x(1-x) = 0 \qquad x = 0 \qquad 1 - x = 0 \qquad x = 1$

اذن الفترة واحدة ومساحة واحدة.

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x \ \ dx \ = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} - x \ \ dx \ = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left[\left(\frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}1^2\right) - (0)\right]$$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$ وحدة مربعة

مثال١ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^3$ والمستقيم $y = x$

الحل:- لا توجد حدود للتكامل نعتبر قيم X الي راح نطلعها هي الفترة.

نجد دالة جديدة.

$y = x - x^3 \qquad y = 0 \qquad x - x^3 = 0 \qquad x(1 - x^2) = 0$

$x = 0 \qquad 1 - x^2 = 0 \qquad x^2 = 1 \qquad x = \pm 1$

راح يصير عدنا فترتين ومساحتين:- $[-1.0][0.1]$

$$A = \int_{-1}^0 x - x^3 dx \ = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0 = \left[(0) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{1}{4}(-1)^4\right)\right]$$

$$= \left[(0) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})\right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-2+1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$A = \int_0^1 x - x^3 dx \quad = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \left[\left(\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{4}(1)^4\right) - 0\right]$

$= \left[(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$

$A_T = |A_1| + A_2 = \frac{1}{4} + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة

تمرين:- جد مساحة المنطقة المحددة بالدالتين $y = \sqrt{x-1}$, $y = \frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2.5]$

***الحل:-** لا توجد حدود للتكامل نعتبر قيم X الي راح نطلعها هي الفترة.*

نجد دالة جديدة.

$y = \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x \qquad y = 0 \qquad \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x = 0$

$\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x$ بالتربيع $x - 1 = \frac{1}{4}x^2 \qquad 4x - 4 = x^2$

$x^2 - 4x - 4 = 0 \qquad (x-2)(x-2) = 0 \qquad (x-2)^2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2 \quad \in [2.5]$

اذن لا نجزئ والفترة واحدة ومساحة واحدة.

$A = \int_2^5 \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}x \quad dx \quad = \int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x \ dx \quad = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2\right]_2^5$

$= \left[\left(\frac{2}{3}(5-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}25^2\right) - \left(\frac{2}{3}(2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}2^2\right)\right] = \left[\left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}25\right) - \left(\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\right]$

$\left[\left(\frac{2}{3}(2^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{25}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - 1\right)\right] = \left[\left(\frac{2}{3}2^3 - \frac{25}{4}\right) - \left(\frac{2-3}{3}\right)\right] = \frac{16}{3} - \frac{25}{4} + \frac{1}{3} = \frac{64 - 75 + 4}{12} = \frac{-7}{12}$

$A = \left|\frac{-7}{12}\right| = \frac{7}{12}$ وحدة مربعة

تمرين:- جد مساحة المنطقة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12$, $y = x^2$.

***الحل:-** لا توجد حدود للتكامل نعتبر قيم X الي راح نطلعها هي الفترة. نجد دالة جديدة.*

$y = x^4 - x^2 - 12 \qquad y = 0 \qquad x^4 - x^2 - 12 = 0 \qquad (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$

$x^2 + 3 = 0$ يهمل $\qquad x^2 - 4 = 0 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \pm 2$

راح يصير عدنا فترة ومساحة:- $[-2.2]$

$A = \int_{-2}^{2} x^4 - x^2 - 12 \quad dx \quad = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x\right]_{-2}^{2}$

$$=\left[\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}-12(2)\right)-\left(\frac{(-2)^5}{5}-\frac{(-2)^3}{3}-12(-2)\right)\right]$$

$$==\left[\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-24\right)-\left(\frac{-32}{5}+\frac{8}{3}+24\right)\right]$$

$$=\frac{96-40-360}{15}-\left(\frac{-96+40+360}{15}\right)=\frac{-304}{15}-\frac{304}{15}=-\frac{608}{15}$$

$A=\left|-\frac{608}{15}\right|=\frac{608}{15}$ وحدة مربعة

تمرين :-جد مساحة المنطقة المحددة بالدالتين $g(x)=sinx \, , f(x)=cosx$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}\right]$

بحالة دالتين والدوال مثلثية فهنا من تخلي الدالة الجديدة =0 تحل المعادلة على اساس معرفتك بقيم الزوايا مو مثل موضوع المساحة تحت المنحني الواحد الي اخذنا قبل هذا الموضوع .

الحل :- نجد الدالة الجديدة ونجعلها =0

$y=cosx-sinx$ $\qquad y=0$

$cosx-sinx=0$

$\cos x=\sin x$

هسه حسب خبرتنا :- الزاوية الوحيدة التي تتساوى فيها قيم cosx مع sinx هي فقط 45 بس بالربع الاول والثالث لان بالاول موجبات وبالثالث سالبات اثنينهن بس بالباقي متخالفات . لكن الربع الثالث خارج الفترة ما ناخذه.

هسه نحلل الزوايا بحيث نعوض قيم n ونشوفها تنتمي لا حتى نجزئ اولا :

$x=\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2}\right]$

$x=\frac{5\pi}{3}\notin\left[0.\frac{\pi}{2}\right]$ راجع موضوع السعة الاساسية

اذن لدينا مساحتين ناتجتين من فترتين هما $\left[\frac{\pi}{4}.\frac{\pi}{2}\right]$ $\left[-\frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{4}\right]$.

$A_T=A_1+A_2$

$$A_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} cosx-sinx \;\; dx=[sinx+cosx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\left[\left(sin\frac{\pi}{4}+cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(sin-\frac{\pi}{2}+cos-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-(-1+0)\right]=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$$

$$A_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cosx-sinx \;\; dx=[sinx+cosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[\left(sin\frac{\pi}{2}+cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(sin\frac{\pi}{4}+cos\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \left[1 + 0 - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = 1 - \sqrt{2}$$

ملاحظة $\sqrt{2}$ اكبر من 1 لذلك فان المساحة الثانية تكون سالبة وحتى نتخلص من السالب نضع قيمة مطلقة ونقلب المقدار.

$$A_T = A_1 + |A_2| = 1 + \sqrt{2} + |1 - \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} + |-(\sqrt{2} - 1)|$$

$$A_T = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$ وحدة مربعة

ت9: - جد المساحة المحددة بين الدالتين $g(X) = 2sinx + 1$. $f(x) = sinx$ والفترة $[0.\frac{3\pi}{2}]$

الحل: - نجد الدالة الجديدة ونجعلها =0

$y = 2sinx + 1 - sinx = sinx + 1$ $\qquad y = 0$ $\qquad sinx + 1 = 0$

$\sin x = -1$

هسه حسب خبرتنا : - الزاوية قيمة sin=-1 هي فقط $\frac{3\pi}{2}$

$$x = \frac{3\pi}{2} \in \left[0.\frac{3\pi}{2}\right]$$

اذن لدينا مساحة ناتجة من فترة $\left[0.\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$A_t = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} sinx + 1 \; dx = [x - cosx]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \left[\left(\frac{3\pi}{2} - cos\frac{3\pi}{2}\right) - (0 - cos0)\right]$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) - (0 - 1) = \frac{3\pi}{2} + 1$$ وحدة مربعة

تمرين: - جد مساحة المنطقة المحددة بالدالتين $f(x) = sinx$, $g(x) = sinxcosx$.وعلى الفترة $[0.2\pi]$

الحل: - نجد الدالة الجديدة ونجعلها =0

$y = sinxcosx - sinx = sinx(cosx - 1)$ $\qquad y = 0$

$sinx(cosx - 1) = 0$ $\qquad$ اما $sinx = 0$

$x = \frac{n\pi}{2}$ $\qquad n = 1.3$ $\qquad \therefore x = 0.\pi.2\pi \in [0.2\pi]$

$\cos x - 1 = 0$ $\qquad \cos x = 1$ $\qquad \therefore x = 0.\pi.2\pi \in [0.2\pi]$

اذن لدينا مساحة ناتجة من فترة $[0.\pi][\pi.2\pi]$.

$$A_1 = \int_0^{\pi} sinxcosx - sinx \; dx = \left[\frac{1}{2}sin^2x + cosx\right]_0^{\pi} = \left[\left(\frac{1}{2}sin^2\pi + cos\pi\right) - \left(\frac{1}{2}sin^20 + cos0\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}(0)^2 - 1\right) - (0 + 1) = -1 - 1 = -2$$

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} sinxcosx - sinx \ dx = \left[\frac{1}{2}sin^2x + cosx\right]_{\pi}^{2\pi} = \left[\left(\frac{1}{2}sin^2 2\pi + cos2\pi\right) - \left(\frac{1}{2}sin^2\pi + cos\pi\right)\right]$$

$$= [\left(\frac{1}{2}(0)^2 + 1\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 - 1\right) = 1 + 1 = 2$$

$$A_T = A_2 + |A_1| = 2 + |-2| = 2 + 2 = 4 \ \ unit^2$$

لا تكبرانه فخ

المسافة والسرعة والتعجيل

كل المسائل تنطلق من دالة السرعة يعني لازم عندك دالة سرعة قبل كلشيء يلله تباشر بالحل.

١-اذا طلب المسافة وعندك دالة السرعة شتسوي:-

أ- نجعل السرعة=صفر ونحلها ونجد t
ب- ب-نقارنها مع الفترة حتى نجزئ التكامل او ما نجزئ.
ت- ج-تكتب قانون المسافة وتكامل السرعة نسبة الى الزمن وتعوض الفترة واذا طلعت سالب تضع قيمة مطلقة.

$$d = \left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\right|$$

٢-اذا طلب البعد او الازاحة هاي مباشرة نكامل كبل ولا قيمة مطلقة ولاهم يحزنون

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

٣-اذا انطاك تعجيل هنا نأخذ فاصل ونواصل نروح نطلع دالة السرعة لان هي المحور الاساسي بالحل

أ- نكامل التعجيل تكامل غير محدد وراح يطلع c+ .
ب- ينطيني معلومة سرعة وزمن اعوضهم بالناتج مالت التكامل واطلع قيمة C. النوب انتقل الى المطالب مسافة وازاحة.

$$v(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$$

معلومات مهمة

١- اذا طلب منك المسافة خلال الثانية الخامسة فيقصد خلال الفترة [4,5] وهكذا لو كانت في الثانية السابعة [6,7]
٢- اذا طلب مثلا المسافة بعد مضي مثلا خمس ثوان فيقصد [0,5].
٣- البعد =الازاحة وممكن يكون سالب او موجب او صفر لانه كمية اتجاهية.
٤- التعجيل ممكن يكون سالب ويعني تعجيل تباطؤ اما الزمن فلا يكون سالب ابدا.

مثال ١:-جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $V(t) = 2t - 4 \quad m\backslash s$ فجد كل من:-

١-المسافة المقطوعة خلال $[1.3]$ ٢-الازاحة المقطوعة خلال $[1.3]$.

٣-المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة. ٤-بعده بعد مضي 4 ثوان من بدء الحركة.

١-مادام طالب مسافة نطبق خطوات المسافة اقرا بعد خالك.

$v = 0 \qquad 2t - 4 = 0 \qquad t = 2 \in [1.3]$ نجزيء

$$d_1 = \int_1^2 2t - 4\, dt = [t^2 - 4t]_1^2 = (4 - 8) - (1 - 4) = -4 + 3 = -1$$

$$d_1 = \int_2^3 2t - 4\, dt = [t^2 - 4t]_2^3 = (9 - 12) - (4 - 8) = -3 + 4 = 1$$

$$d_t = |d_1| + d_2 = |-1| + 1 = 2\, m$$

٢-الازاحة مباشرة تكامل السرعة.

$$s = \int_1^3 2t - 4\, dt = [t^2 - 4t]_1^3 = (9 - 12) - (1 - 4) = -3 + 3 = 0\, m$$

٣-المسافة في الثانية الخامسة يعني $[4,5]$

$v = 0 \qquad 2t - 4 = 0 \qquad t = 2 \notin [4.5]$

$$d = \int_4^5 2t - 4\, dt = [t^2 - 4t]_4^5 = (25 - 16) - (16 - 16) = 11m$$

٤-البعد بعد مضي 4 ثوان يعني $[0,4]$ ايضا مباشرة تكامل .

$$s = \int_0^4 2t - 4\, dt = [t^2 - 4t]_0^4 = (16 - 16) - (0) = 0\, m$$

مثال ٢:-جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $a(t) = 18 \quad m\backslash s^2$ وكانت سرعته اصبحت 82m\s بعد مضي 4 ثانية من بدء الحركة فجد كل من :-

١-المسافة خلال الثانية الثالثة. ٤-بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مضي 3 ثوان .

هنا ما موجود عندك بالسؤال دالة السرعة . ناخذ فاصل ونواصل .نروح نطلع دالة السرعة .تكامل التعجيل غير محدد.

$$v = \int 18\, dt = 18t + c$$

لازم نطلع قيمة c . عدنا معلومة سرعة وزمن نعوض ونطلع c .

$82 = 18(4) + c \qquad 82 - 72 = c \qquad c = 10$

$$v = 18t + 10$$

عدنا من جديد .١-المسافة في $[2,3]$.نجعل

$v = 0 \quad 18t + 10 = 0 \quad t = -\frac{10}{18}$ يهمل سالب

$$d = \int_2^3 18t + 10\, dt = [9t^2 + 10t]_2^3 = (81 + 30) - (36 + 20) = 111 - 56 = 55m$$

٣-البعد مباشرة تكامل

$$s = \int_0^3 18t + 10\, dt = [9t^2 + 10t]_0^3 = (81 + 30) - (0) = 111\ m$$

تمارين١:-جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 3t^2 - 6t + 3 \quad m\backslash s$ فجد كل من:-

١-المسافة المقطوعة خلال $[2.4]$ ٢-*الازاحة المقطوعة خلال* $[0.5]$.

١-مادام طالب مسافة نطبق خطوات المسافة اقرا بعد خالك .

$v = 0 \quad 3t^2 - 6t + 3 = 0 \quad \div 3 \quad t^2 - 2t + 1 = 0 \quad (t-1)(t-1) = 0 \quad \surd$

$t - 1 = 0 \quad t = 1 \in [2.4]$ لانجزيء

$$d = \int_2^4 3t^2 - 6t + 3\, dt = [\ t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4 = (64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6) = 28 - 2 = 26m$$

٢-الازاحة كبل بدون حزن

$$d = \int_0^5 3t^2 - 6t + 3\, dt = [\ t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5 = (125 - 75 + 15) - (0) = 65m$$

ت١٢-جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $a(t) = 4t + 12 \quad m\backslash s^2$ وكانت سرعته اصبحت 90m\s بعد مضي 4 ثانية من بدء الحركة فجد كل من:-

١-السرعة عند t=2.

٢-المسافة المقطوعة خلال $[1.2]$

٤-الازاحة عن نقطة بدء الحركة بعد مضي 10ثوان.

هنا ما موجود عندك بالسؤال دالة السرعة . ناخذ فاصل ونواصل .نروح نطلع دالة السرعة .نكامل التعجيل غير محدد.

$$v = \int 4t + 12\, dt = 2t^2 + 12t + c$$

لازم نطلع قيمة c . عدنا معلومة سرعة وزمن نعوض ونطلع c .

$90 = 2(4)^2 + 12(4) + c \quad 90 = 80 + c \quad 90 - 80 = c \quad c = 10$

$v = 2t^2 + 12t + 10$

عدنا من جديد .١-السرعة .اذا عندك دالة سرعة وطلب سرعة هاي مباشر عوض t وطلع السرعة .بدون تكامل

$$v = 2(2)^2 + 12(2) + 10 = 8 + 24 + 10 = 42m/s$$

٢-٣-المسافة خلال [1.2] نجعل

$v = 0 \qquad 2t^2 + 12t + 10 = 0 \quad \div 2 \qquad t^2 + 6t + 5 = 0 \qquad (t+5)(t+1) = 0$

$t = -5 \qquad t = -1$ تهملان

$$d = \int_1^2 2t^2 + 12t + 10\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t\right]_1^2 = \left(\frac{2}{3}2^3 + 6.2^2 + 10.2\right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10\right)$$
$$= \frac{16}{3} + 24 + 20 - \frac{2}{3} - 16 = \frac{14}{3} + 28 = \frac{98}{3}\ m$$

٣-الازاحة مباشرة تكامل

$$s = \int_0^{10} 2t^2 + 12t + 10\,dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 10t\right]_0^{10}$$

$$= \left(\frac{2}{3}10^3 + 6.10^2 + 10.10\right) - (0) = \frac{2000}{3} + 600 + 100 = \frac{2000}{3} + 700 = \frac{4100}{3}\ m$$

ت١٣-٢٠١٤-د٢: - تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول الذي بدات منه ثم احسب التعجيل عندها .

الحل: مطلوب الزمن اللازم لعودة النقطة لموضعها الاول. وإذا رجعت لمكانها الاول يعني الازاحة مالتها صفر. لان بالفيزياء كل جسم يرجع لنقطة البداية فان ازاحته=صفر. المهم لازم نوجد الازاحة كدالة وبعدين نجعلها=صفر ومنها نطلع قيمة t المطلوبة.

معطى دالة سرعة. والفترة هي من البداية الى ثانية $[0,t]$

$$s = \int_0^t 100t - 6t^2\,dt = 50t^2 - 2t^3$$

وبعد رجوع الجسم الى موضعه فان الازاحة=صفر

$50t^2 - 2t^3 = 0 \quad \div 2 \qquad t^2(25 - t) = 0 \qquad$ اما $t^2 = 0$ تهمل

$25 - t = 0 \qquad t = 25\ sec$

ومطلوب التعجيل عندها. والتعجيل هو مشتقة السرعة. بالخامس علمي موجود.

$$a = v' = 100 - 12t \qquad = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200\ m/s^2$$

الحجوم الدورانية

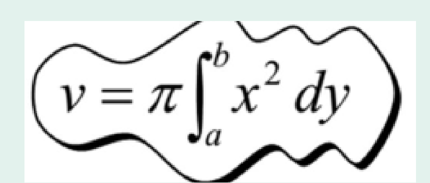
$$v = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

١-حجم ناتج من الدوران حول محور السينات. نطبق القانون

لازم نراعي شنو

أ-حدود التكامل لازم قيم x وإذا قيم y صير لازم تعوض قيم y بالدالة وتطلع قيم x.

ب-ترفع y^2 وتخلي مكانها الدالة بس لازم تربعها بالبداية وتعوضها .



٢-حجم ناتج من الدوران حول محور الصادات نطبق القانون

ا-حدود التكامل (الفترة) قيم y وإذا منطي x نعوضهن ونطلع قيم y.

ب-نقلب الدالة ونطلع قيمة x بدلالة y وبعدين نربعها ونعوضها ثم نكامل ونطلع الناتج.

مثال:- المنطقة المحددة بين المنحني $0 \le x \le 4$ $y = \sqrt{x}$ ومحور السينات، دارت حول محور السينات. جد حجمها.

بما ان الدوران حول السينات.

$$v = \pi \int_0^4 y^2 dx$$

لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها $y^2 = x.$ $y = \sqrt{x}$

$$v = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi[8 - 0] = 8\pi \ \ unit^3$$

مثال:- المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$. $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$، دارت حول محور الصادات. جد حجمها.

بما ان الدوران حول الصادات

$$v = \pi \int_1^4 x^2 dy.$$

لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها $x^2 = \frac{1}{y}.$ $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$v = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy = \pi[\ln y]_1^4 = \pi[\ln 4 - \ln 1] = \pi \ln 4 \ \ unit^3$$

مثال :-اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين x-0 , x=2 حول محور السينات.

بما ان الدوران حول السينات. $v = \pi \int_0^2 y^2 dx$

$y^2 = 8x$ لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها

$$v = \pi \int_0^2 8x dx = \pi[4x^2]_0^2 = \pi[16 - 0] = 16\pi \ \ unit^3$$

مثال :-اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيمين x-0 , x=5 حول محور السينات.

بما ان الدوران حول السينات.

$$v = \pi \int_0^5 y^2 dx$$

$y = 2x^2$ $y^2 = 4x^4.$ لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها

$$v = \pi \int_0^5 4x^4 dx = \pi \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^5 = \pi[2500 - 0] = 2500\pi \ \ unit^3$$

مثال :-اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 4x^2$ والمستقيمين y-0 , y=16 حول محور الصادي.

بما ان الدوران حول الصادات $v = \pi \int_0^{16} x^2 dy.$

$y = 4x^2$ $x^2 = \frac{y}{4} = \frac{1}{4}y.$ لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها

$$v = \pi \int_0^{16} \frac{1}{4} y dy = \frac{\pi}{4} \int_0^{16} y dy = \frac{\pi}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{16} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{256}{2} - 0\right] = 32\pi \ \ unit^3$$

مثال :-اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين

$x = 1$. $x = \frac{1}{2}$ حول محور الصادي.

ملاحظة: -اذا حدود التكامل منطيها قيم x والدوران حول y ما يصير لازم تعوضها بالدالة وتطلع قيم y ثم تكمل حلك .

$x = 1$ $y = \frac{1}{1} = 1$ $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

بما ان الدوران حول الصادات $v = \pi \int_1^2 x^2 dy.$

لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها $x^2 = \frac{1}{y^2} = y^{-2}.$ $y = \frac{1}{x}$

$$v = \pi \int_1^2 y^{-2} dy = \pi \left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^2 = -\pi \left[\frac{1}{y}\right]_1^2 = -\pi \left[\frac{1}{2} - 1\right] = -\pi \left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2} \ unit^3$$

اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1 . \ x = 2$ حول محور السين.

بما ان الدوران حول السينات.

$$v = \pi \int_1^2 y^2 dx$$

لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها $y^2 = x^4.$ $y = x^2$

$$v = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right] = \frac{31}{5}\pi \ \ unit^3$$

اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالمنحني الذي معادلته $y^2 = x^3$ والمستقيمين $x = 0 . \ x = 2$ حول محور السيني.

بما ان الدوران حول السينات. $v = \pi \int_0^2 y^2 dx$

لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها $y^2 = x^3$

$$v = \pi \int_0^2 x^3 dx = \pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \pi[4 - 0] = 4\pi \ \ unit^3$$

اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة الذي معادلته $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول محور الصادي.

اذا الدوران حول الصادات ومنطيك قيمة واحدة y معناها الرقم الثاني الدالة تقاطع محور yy وهذا يعني نجعل x=0 ونجد y الثانية . وهكذا لو الدوران حول xx .

$x = 0 \qquad y = 0 + 1 = 1 \qquad [1.4]$

بما ان الدوران حول الصادات $v = \pi \int_1^4 x^2 dy.$

$y = x^2 + 1$ ننقل $x^2 = y - 1.$ لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها

$$v = \pi \int_1^4 y - 1dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^4 = \pi\left[(8-4) - (\frac{1}{2} - 1)\right] = \pi\left[4 + \frac{1}{2}\right] = \frac{9\pi}{2} \ unit^3$$

اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة الذي معادلته $y^2 + x = 1$ والمستقيمين $x = 0$ حول محور الصادي.

ملاحظة :-اذا حدود التكامل منطيها قيم x والدوران حول y ما يصير لازم تعوضها بالدالة وتطلع قيم y ثم تكمل حلك .

$x = 0$ $y^2 + 0 = 1$ $y = \pm 1$

بما ان الدوران حول الصادات $v = \pi \int_{-1}^{1} x^2 dy.$

$y^2 + x = 1$ $x = 1 - y^2$ $x^2 = (1 - y^2)^2$ لازم نطلع قيمة الدالة تربيع ونعوضها

$$v = \pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)^2 dy = \pi \int_{-1}^{1} 1 - 2y^2 + y^4 dy = \pi \left[y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^2}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \pi\left[1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right]$$

$$= \pi\left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right] = \pi\left(2 - \frac{20}{15} + \frac{6}{15}\right) = \pi\left[2 - \frac{14}{15}\right] = \pi\left[\frac{30}{15} - \frac{14}{15}\right] = \frac{16\pi}{15} \ unit^3$$

٢٠١٧-جد الحجم الناتج من دوران الدائرة $(y^2 + x^2 = 9)$ حول محور السينات ومركزها نقطة الأصل.

ملاحظة لا توجد حدود تكامل. وبمان الدوران حول محور السينات فان نقاط تقاطع المنحني مع محور السينات هي نفسها تمثل حدود التكامل.

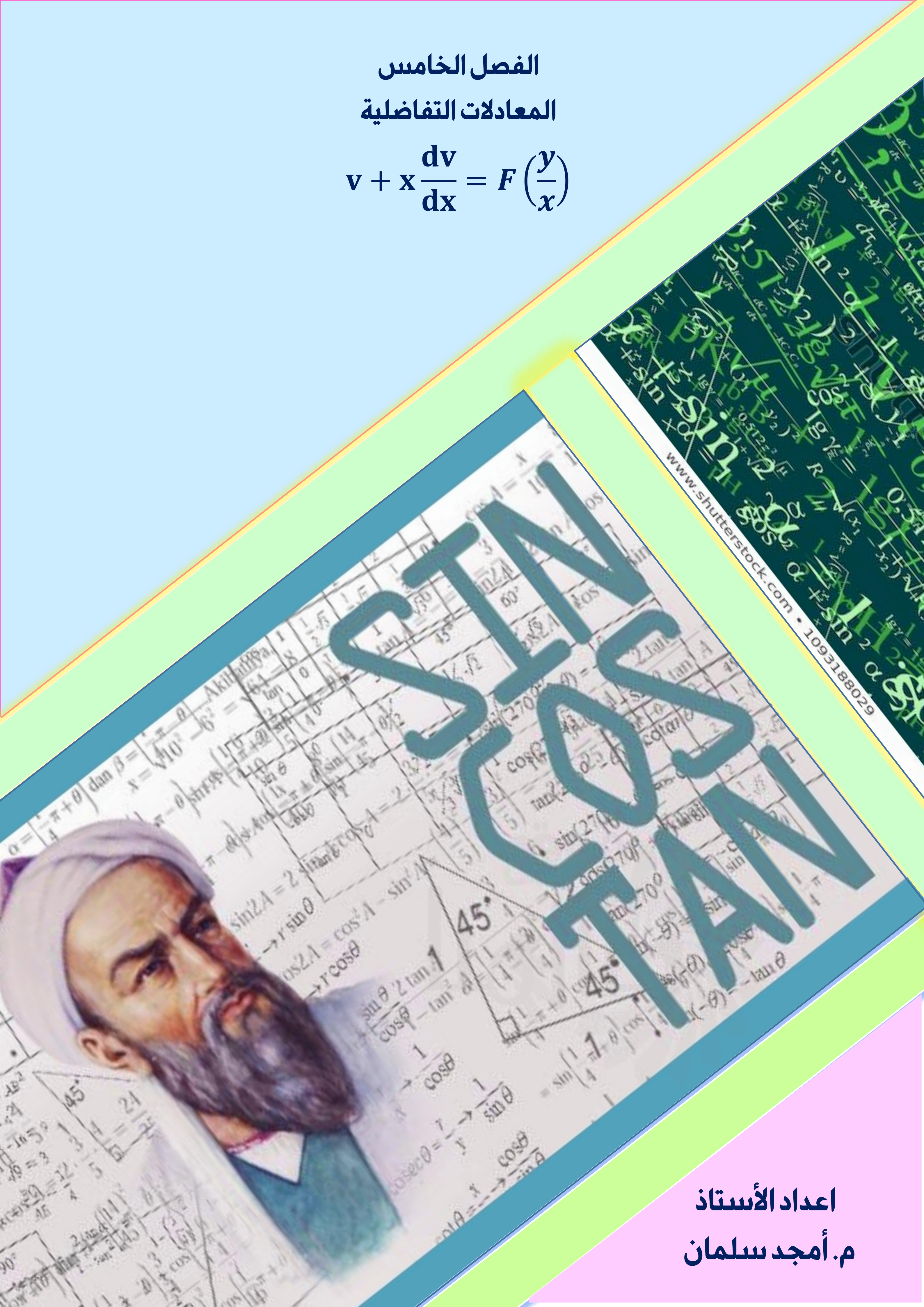
$y = 0$ $0^2 + x^2 = 9$ $x = \pm 3$ الفترة $\rightarrow [-3.3]$

الدوران حول محور السينات نجد قيمة y

$y^2 + x^2 = 9$ $\rightarrow y^2 = 9 - x^2$

$$v = \pi \int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} 9 - x^2 dx = \pi \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3} = \pi\left[\left(9 \times 3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9 \times -3 - \frac{-3^3}{3}\right)\right]$$

$$= \pi[(27 - 9) - (-27 + 9)] = \pi[18 + 18] = 36\pi unit^3$$



الفصل الخامس

المعادلات التفاضلية

$$\mathbf{v} + \mathbf{x}\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

اعداد الأستاذ

م. أمجد سلمان

المعادلة التفاضلية (Differential Equation):- هي المعادلة التي تحتوي مشتقة واحدة او اكثر للدالة المجهولة في المعادلة (أي للمتغير التابع في المعادلة).

المعادلة التفاضلية الاعتيادية: - هي علاقة بين متغير مستقل (independt Variable) ودالته غير المعروفة (y) (dependt Variable) وبعض مشتقات (y) بالنسبة للمتغير (x) ويرمزلها بالرمز O.D.E وهي مختصر الى (Ordinary Differential Equation).

امثلة

$1)\ \frac{dy}{dx} = 3y - 4x \qquad 2)\ x^2y''' + 5xy' - xy = 0 \qquad 3)\ y' + xy + \cos x + y^{(4)} = y$

الرتبة-المرتبة (*Order*) :- هي اعلى مشتقة موجودة في المعادلة

الدرجة (*degree*) :-اس اكبر مشتقة .

والحل في البداية نحدد اعلى مشتقة لتمثل الرتبة والاس لها يمثل الدرجة.

س//// حدد مرتبة ودرجة المعادلات التالية ؟

$1)\ \frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$

$2)\ \frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3xy + 7$

$3)\ (y''')^3 + y' - y = 0$

$4)\ y'' + 2y(y')^3 = 0$

$5)\ (\frac{dy}{dx})^4 = x^3 - 5$

المعادلة	الدرجة	الرتبة
1	الاولى	الاولى
2	الاولى	الثانية
3	الثالثة	الثالثة
4	الاولى	الثانية
5	الرابعة	الاولى

حل المعادلة التفاضلية

حل المعادلة التفاضلية اي علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث يحقق الشروط التالية :-

١-خال من المشتقة ٢-معرف ضمن فترة معينة ٣-يحقق المعادلة التفاضلية.

شكل السؤال:-ينطيك علاقة معينة و وياها معادلة تفاضلية ويطلب منك التحقق من العلاقة هل حل لمعادلة تفاضلية ام لا ؟

الحل :-

١-تنطلق كبل للمعادلة تفاضلية وتأخذ الطرف الي بيه مشتقات منها .تكتبه كدامك فقط .

٢-تروح للعلاقة تجيبها تشتقها مرة او مرتين حسب المعادلة التفاضلية .

٣-تعوض ناتج الاشتقاق بالطرف الي اخذته وتشوف الناتج .ثم تعوض العلاقة بالطرف الايمن لازم يطلع نفس الايسر.

٤-اذا كال (تحقق-بين ان-اثبت ان-برهن ان) فالعلاقة حل للمعادلة غصبا عليك .بحيث الطرف الي انت مأخذه حور بيه واستعين بالعلاقة منا لما يطلع يشبه الطرف الاخر .اما اذا كال (هل ان) فالعلاقة ممكن حل وممكن لا .

ملاحظة مهمة جدا:-

اذا العلاقة المعطاة لك علاقة ضمنية يعني y ما صافية مثل ($y^n . xy . lny . cosy$ …..) هاي مباشرة ما تأخذ طرف ايسر من المعادلة التفاضلية وانما تأخذ العلاقة وتشتقها ضمنيا حسب عدد المشتقات بعدين تحور بالناتج مالت الاشتقاق وتسويه يشبه المعادلة التفاضلية وتتأكد منه يشبه او لا حتى تكول العلاقة حل او لا .

اولا – الدوال الصريحة

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

باوع:- مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات .

الدالة او العلاقة هي $y = x^2 + 3x$ والمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة وليس الدالة .

$$LHS = xy'$$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة.

$$y' = 2x + 3$$

نعوضها بالطرف الايسر $LHS = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

نعوض العلاقة بالايمن $RHS = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3x$

سبحان الله .اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية .لان $LHS = RHS$

اثبت ان العلاقة $y = xlnx - x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $x > 0$ $xy' = x + y$

باوع ودحج :- مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات .

الدالة او العلاقة هي $y = xlnx - x$ والمعادلة التفاضلية $xy' = x + y$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة وليس الدالة .

$LHS = xy'$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة .طبعا ضرب دالتين .

$$y' = x \cdot \frac{1}{x} + lnx \cdot 1 - 1 = 1 + lnx - 1 = lnx$$

نعوضها بالطرف الايسر $LHS = x(lnx) = \text{xlnx}$

نعوض العلاقة بالايمن $RHS = x + y = x + xlnx - x = xlnx$

سبحان الله .اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS = RHS$

هل ان $y = x^3 + \text{x} - 2$ هي حل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

باوع ودحج :- مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات .

الدالة او العلاقة هي $y = x^3 + \text{x} - 2$ والمعادلة التفاضلية $y'' = 6x$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة وليس الدالة .

$LHS = y''$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة الثانية.

$y' = 3x^2 + 1$ $y'' = 6x$

ولا نحتاج ان نعوضها هي طلعت مباشر.

اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS = RHS$

شوف انتبليالي اذا الطرف الايمن ما بيه y بعد ما تكدر تعوض بيه لذلك تاخذ بس الايسر وتبسطه لازم الجواب يطلع يساوي الطرف الايمن.

@Amjed2017 @xymath

برهن ان $y = 3cos2x + 2sin2x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

باوع ودحج: - مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات.

الدالة او العلاقة هي $y = 3cos2x + 2sin2x$ والمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة وليس الدالة .

$LHS = y'' + 4y$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة اللوخ

$y' = 3 \times -sin2x \,.\, 2 + 2 \times cos2x \,.\, 2 = -6sin2x + 4cos2x$

$y'' = -6 \times cos2x \,.\, 2 + 4 \times -sin2x \,.\, 2 = -12cos2x - 8sin2x$

نعوضها بالطرف الايسر كل العلاقة y والمشتقة الثانية :-

$LHS = y'' + 4y = (-12cos2x - 8sin2x) + 4(3cos2x + 2sin2x)$

$= -12cos2x - 8sin2x + 12cos2x + 8sin2x =$ بالاختصار $= 0$

اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS = RHS$

بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

انتبه اعليه:- مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات .

الدالة او العلاقة هي $y = e^{2x} + e^{-3x}$ والمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

ناخذ الطرف الايسر من المعادلة وليس الدالة .

$LHS = y'' + y' - 6y$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة الثانية والاولى . راجع مشتقة الدالة الاسية بعد خال عمك.

$y' = 2e^{2x} + (-3)e^{-3x} = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$

$y'' = 2.2e^{2x} - 3.(-3)e^{-3x} = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$

نعوضها بالطرف الايسر كل العلاقة y والمشتقة الثانية والاولى :-

$LHS = y'' + y' - 6y = (4e^{2x} + 9e^{-3x}) + (2e^{2x} - 3e^{-3x}) - 6(e^{2x} + e^{-3x}) =$ نضربهم

$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} =$ بالاختصار $= 0$

اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS = RHS$

بين ان $y = sinx$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$

مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات .

الدالة او العلاقة هي $y = sinx$ والمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة وليس الدالة .

$LHS = y'' + y$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة الثانية . $y'' = -sinx$ $\quad y' = cosx$

نعوض في الطرف الايسر. $LHS = y'' + y = -sinx + sinx = 0$

اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS = RHS$

برهن ان $s = 8cos3t + 6sin3t$ هي حل للمعادلة التفاضلية $s'' + 9s = 0$

باوع ودحج :- مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات .

الدالة او العلاقة هي $s = 8cos3t + 6sin3t$ والمعادلة التفاضلية $s'' + 9s = 0$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة وليس الدالة .

$LHS = s'' + 9s$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة اللوخ

$s' = 8 \times -sin3t \,.\, 3 + 6 \times cos3t \,.\, 3 = -24sin3t + 18cos3t$

$s'' = -24 \times cos3t \,.\, 3 + 18 \times -sin3t \,.\, 3 = -72cos3t - 54sin3t$

نعوضها بالطرف الايسر كل العلاقة y والمشتقة الثانية :-

$LHS = s'' + 9s = (-72cos3t - 54sin3t) + 9(8cos3t + 6sin3t)$

$= -72cos3t - 54sin3t + 72cos3t + 54sin3t =$ بالاختصار $= 0$

اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS = RHS$

----

5 . هل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$ ؟

محلول بالتفاضل راجعه بعد اخوك **باول تمارين**

هل ان $y = x + 2$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + y = x$

مباشرة ناخذ الطرف الي بيه مشتقات.

الدالة او العلاقة هي $y = x + 2$ والمعادلة التفاضلية $y'' + 3y' + y = 0$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة

$LHS = y'' + 3y' + y$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة الثانية. $y'' = 0$ $\quad$ $y' = 1$

نعوض في الطرف الايسر. $LHS = 1 + 3(0) + x + 2 = x + 3$

اذن العلاقة المعطاة تمثل لا حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS \neq RHS$

بين ان $y = ae^{-x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $a \in R$ $\quad$ $y' + y = 0$

الدالة او العلاقة هي $y = ae^{-x}$ والمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ ناخذ الطرف الايسر من المعادلة

$LHS = y' + y$

هسه نروح للعلاقة نطلع منها المشتقة الثانية. $y' = -ae^{-x}$

نعوض في الطرف الايسر. $LHS = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0$

اذن العلاقة المعطاة تمثل حلا للمعادلة التفاضلية. لان $LHS = RHS$

ثانيا اذا الدالة ضمنية يعني y متحرشين بيها

بين ان $lny^2 = x + a$ هي حل للمعادلة التفاضلية $2Y' - Y = 0$

بالضمنية نشتق بعدد مرات اكبر مشتقة موجودة بالسؤال. ثم نحور بالناتج لما يطلع تشبه المعادلة التفاضلية. نبسط الدالة حسب خاصية اللوغارتيم ثم نشتق.

$2lny = x + a$ نشتق $\rightarrow$

$2.\frac{y'}{y} = 1 \quad \rightarrow \quad 2y' = y$ ننقل

$\rightarrow 2y' - y = 0$

اصبحت مطابقة للمعادلة التفاضلية. اذن العلاقة حلا للمعادلة التفاضلية.

بين ان $xy = sin5x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' + 25yx = 0$

الحل :- نشتق ضمنيا الطرف الايسر ضرب دالتين .

نشتق مرة اخرى $y + xy' = 5cos5x$ $y.1 + x.y' = 5cos5x$

$y' + \underbrace{x}_{\text{الاولى}}\ \underbrace{y''}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{y'}_{\text{الثانية}}\ \underbrace{1}_{\text{مشتقة الاولى}} = -25sin5x$

$xy'' + 2y' + 25sin5x = 0$ $y' + xy'' + y' = -25sin5x$

تقريبا مطابقة الا شوية. عدنا بالدالة.

$yx = sin5x$

نعوضها في المشتقة :-

$xy'' + 2y' + 25yx = 0$ $xy'' + 2y' + 25sin5x = 0$

اصبحت مطابقة . اذن العلاقة حلا للمعادلة .

هل ان $2x^2 + y^2 = 1$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y^3y'' = -2$

المعادلة ضمنية نشتق بالتسلسل الى ان نصل الى المشتقة الثانية .

ثم نشتق $2x + yy' = 0$ $\div 2$ $4x + 2yy' = 0$

$2 + \underbrace{y}_{\text{الاولى}}\ \underbrace{y''}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{y'}_{\text{الثانية}}\ \underbrace{y'}_{\text{مشتقة الاولى}} = 0$

نبسط المقدار.

$yy'' + (y')^2 = -2$

المعادلة التفاضلية ما بيها مشتق اول . لازم نشيل المشتقة الاولى ونخلي مكانها الي تساويها .عدنا

$(y')^2 = \frac{4x^2}{y^2}$ $y' = -\frac{2x}{y}$ $yy' = -2x$ $2x + yy' = 0$

$yy'' + \frac{4x^2}{y^2} = -2$ $\times y^2$ $\rightarrow y^3y'' + 4x^2 = -2y^2$

$y^3y'' = -2y^2 - 4x^2$ عامل مشترك

$y^3y'' = -2(y^2 + 2x^2)$ لكن $y^2 + 2x^2 = 1$

$\therefore y^3y'' = -2(1) = -2$ *العلاقة حل للمعادلة التفاضلية .*

بين ان $c \in R$ $\ln|y| = x^2 + c$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' = 4x^2y + 2y$

المعادلة ضمنية نشتق بالتسلسل الى ان نصل الى المشتقة الثانية .

ثم نشتق $\frac{y'}{y} = 2x \rightarrow \quad y' = 2xy$

$$y'' = 2\left[\underbrace{x}_{\text{الاولى}}\ \underbrace{y'}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{y}_{\text{الثانية}}\ \underbrace{1}_{\text{مشتقة الاولى}}\right] = 2xy' + 2y$$

نبسط المقدار.

المعادلة التفاضلية ما بيها مشتق اول . لازم نشيل المشتقة الاولى ونخلي مكانها الي تساويها .عدنا

نعوضها $y' = 2xy$

$$y'' = 2xy' + 2y = 2x\,(2xy) + 2y = 4x^2y + 2y$$

العلاقة حل للمعادلة التفاضلية .

حل المعادلات التفاضلية

اولاً : المعادلات التي تنفصل متغيراتها Separation of Variables

هنا راح ينطيك معادلة تفاضلية فقط يكلك بعد اخوك طلعنا الحل مالتها مواتاكد من الحل . لا .اوكي . فشنسوي ؟تابع ذن الخطوات :-

١-حول كل $(y \rightarrow \frac{dy}{dx})$ مباشرة.و اذا لكيته محولها بالسؤال بعد احسن .

٢-اضرب المعادلة بالمقدار dx للطرفين حتى يختصر .

٣-شكو حد عنده dx انقله لجهة. و الي عنده dy انقله للجهة الثانية .

٤-اذا عندك حدين بيهم dx او dy او مقدار معين مشترك . هذا يؤخذ عامل مشترك .

٥-بعدما صاروا طرفين شكو مقدار من جماعة y يم dx اسحبه للطرف الي بيه dy كذلك اذا x يم dy.

٦-مهم هنا عملية السحب تتم بطريقة الضرب وسطين بطرفين يعني المقام للبسط البسط للمقام بالطرف الثاني.

٧-راح يصير جماعة x بجهة = جماعة y تروح كبل للتكامل وتكامل الطرفين ونضع c لجهة واحدة .حسب القانون التالي

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

باع شون راح امشي ع الخطوات :-

مثال – 1 –

حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

$\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \quad]dx$ $\qquad$ $dy = (2x + 5)dx$

مادام معزولات اذن نكامل الطرفين .

$\int dy = \int (2x + 5)dx$ $\qquad$ $y = x^2 + 5x + c$



حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{y}$

جاهزة بس ننقل الحدود المتشابهة بس نضرب ب dx نسحب y من المقام للبسط لجهة dy .

$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{y} \quad]dx$ $\qquad$ $ydy = x - 1 \quad dx$

مادام معزولات اذن نكامل الطرفين .

$\int ydy = \int x - 1dx$ $\qquad$ $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$

انتهى الحل المطلوب من الطالب وزاريا . يبقى التبسيط التالي الطالب مخير في ان يجريه اولا .

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c \quad \times 2$ $\qquad$ $y^2 = x^2 - 2x + 2c$ $\qquad$ $\sqrt{\text{للطرفين}}$ $\quad$ $y = \mp\sqrt{x^2 - 2x + 2c}$

كلما تتغير بحيث تنضرب برقم او سالب / تتقسم غير تسميتها

$y = \mp\sqrt{x^2 - 2x + c1}$

مثال – 3 –

حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \ \cos^2 y \ dx$ حيث $\cos y \neq 0 \ , \ y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

مادام كل وحدة بجهة اذن بس نسحب جماعة y الي يم dx ننقلها لجماعة dy بالسحب وسطين بطرفين .

$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x \ dx$ $\qquad$ $\sec^2 y \ dy = \sin x \ dx$

مادام معزولات اذن نكامل الطرفين .

$\int \sec^2 y \ dy = \int \sin x \ dx$ $\qquad$ $\tan y = -\cos x + c$

مثال – 6–

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$

$(x+1)\frac{dy}{dx}=2y \quad]dx \qquad (x+1)\,dy=2ydx$

ما يصير نكامل لازم ننقل . خلي ابالك كل الي ببسط يصير بالمقام بالجهة الثانية .الي بالمقام يصعد بالبسط بس بالجهة الثانية .

$\frac{dy}{y}=\frac{2\,dx}{(x+1)}$

مادام معزولات اذن نكامل الطرفين . طبعا المقام دالة مشتقته بالبسط نكامل بطريقة In .

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2\,dx}{(x+1)} \qquad ln|y|=2ln|x+1|+c \qquad ln|y|=ln(x+1)^2+c$

انتهى الحل المطلوب من الطالب وزاريا . يبقى التبسيط التالي الطالب مخير في ان يجريه اولا .

$ln|y|=ln(x+1)^2+c \quad]e$ للطرفين $\qquad e^{ln|y|}=e^{ln(x+1)^2+c}$

$e^{a+b}=e^a.e^b \qquad e^{lnu}=u \qquad e^c=c1$ نستفاد من معلومة

$e^{ln|y|}=e^{ln(x+1)^2}.e^c \quad \to\to \quad y=\pm c1(x+1)^2$

ملاحظة :– مرات يطلب منك حل معادلة ينطيك قيم x,y كاعداد شنو تسوي ؟

تكامل حسب الخطوات مالتنا . تعوض قيم x y وتطلع قيمة c وترجع للمعادلة تعوضها بيها وهايهيه .

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y'-x\sqrt{y}=0$ عندما $x=2\,,\,y=9$

$\frac{dy}{dx}-x\sqrt{y}=0 \quad]dx$ وننقل $dy=x\,y^{\frac{1}{2}}\,dx$ بالسحب

$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}}=x\,dx$ نصعد $y^{-\frac{1}{2}}dy=xdx \qquad \int y^{-\frac{1}{2}}dy=\int xdx$

$2y^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{2}+c \qquad 2\sqrt{y}=\frac{1}{2}x^2+c$

هسه لازم نطلع قيمة c من خلال تعض القيم المعطاة .

$2\sqrt{9}=\frac{1}{2}2^2+c \qquad 6=2+c \qquad c=6-2=4$

نرجع للمعادلة نعض قيمة c .

$$2\sqrt{y}=\frac{1}{2}x^2+4$$

انتهى الحل المطلوب . الباقي تبسيط .

$$2\sqrt{y}=\frac{1}{2}x^2+4 \quad \div 2 \qquad \sqrt{y}=\frac{1}{4}x^2+2 \quad \text{بالتربيع} \quad y=\left(\frac{1}{4}x^2+2\right)^2$$

==

حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$ حيث $y=0$ عندما $x=0$

الدالة الاسية وزع الاس عليها دائما .

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}.e^{y} \quad]dx \qquad dy=e^{2x}.e^{y}\,dx \qquad \text{نسحب } e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}}=e^{2x}\,dx \qquad e^{-y}\,dy=e^{2x}dx$$

راجع تكامل الدوال الاسية بحيث نوفر مشتقة الدالة الفوك يالله نكامل .

$$\int e^{-y}\,dy=\int e^{2x}dx \qquad -\int e^{-y} \quad \times -1dy=\frac{1}{2}\int e^{2x} \quad 2dx$$

$$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}+c \qquad \times -1 \qquad e^{-y}=-\frac{1}{2}e^{2x}-c$$

هسه نعوض قيم $y=0$ $x=0$

$$e^{0}=-\frac{1}{2}e^{0}-c \qquad 1=-\frac{1}{2}-c \qquad 1+\frac{1}{2}=-c$$

$$c=\frac{-3}{2}$$

انتهى الحل . اذا تريد تكمل تبسيط عادي عادي ناخذ اللوغارتيم للطرفين

$$lne^{-y}=\ln\left|-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}\right| \qquad -y=ln\left|-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}\right| \quad]-1$$

$$y=-\ln\left|-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}\right|=\ln\left|-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{3}{2}\right|^{-1}=ln\left|\frac{2}{(3-e^{2x})}\right|$$

تمارين 2-5

نمشي حسب الخطوات المكتوبة

a) $y'\cos^3 x = \sin x$

$\frac{dy}{dx}\cos^3 x = sinx \qquad]dx$

$\cos^3 x \quad dy = sinx \ dx$

لازم نعزلهم حسب طريقة السحب

$dy = \frac{sinx}{\cos^3 x}\ dx$

$\int dy = \int \cos^{-3}x \qquad sinx\ dx$

الطرف الايمن قوس ومشتقته عوزهم بس سالب .

$\int dy = -\int \cos^{-3}x \qquad \times -sinx\ dx$

$y = -\frac{1}{-2}\cos^{-2}x + c = \frac{1}{2}\cos^{-2}x + c$

$y = \frac{1}{2\cos^2 x} + c = \frac{1}{2}\sec^2 x + c$

---

c) $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1) \qquad]dx$

$dy = (x+1)(y-1)dx$

هسه نسحب للمقام .

$\frac{dy}{y-1} = x+1 \ \ dx$

هسه نكامل .الايمن لوغاريتم الايسر عادي .

$\int \frac{dy}{y-1} = \int x+1 \ dx$

$ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + x + c$

انتهى الحل

باخذ e للطرفين .

$e^{ln|y-1|} = e^{\frac{1}{2}x^2+x+c}$

$|y-1| = e^{\frac{1}{2}x^2+x}.e^c$

$y - 1 = \pm c1e^{\frac{1}{2}x^2+x}$

$y = 1 \pm c1e^{\frac{1}{2}x^2+x}$

d) $(y^2+4y-1)y' = x^2-2x+3$

نحول

$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = (x^2-2x+3) \quad]dx$

$(y^2+4y-1)dy = (x^2-2x+3) \quad dx$

هسه نكامل

$\int (y^2+4y-1)dy = \int (x^2-2x+3) \quad dx$

$\frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + c$

---

f) $e^x dx - y^3 dy = 0$

ننقل

$e^x dx = y^3 dy$

مادام معزولات اذن نكامل .

$\int e^x dx = \int y^3 dy$

$e^x = \frac{1}{4}y^4 + c$

---

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

مباشر وسطين بطرفين كلشي جاهز.

$3y^2 + e^y dy = cosx\ dx$

هسه نكامل كلشي جاهز

$\int 3y^2 + e^y dy = \int cosx\ dx$

$y^3 + e^y = sinx + c$

$$e)\quad \frac{dy}{dx}=\cos^2 x\ \cos^2 y$$

$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y \qquad]dx$

ونسحب للجهة الاخرى .

$\frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x\, dx$

هسه نكامل الجزء الايسر يتحول والايمن اب نصيف .

$\int \sec^2 y\, dy = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx$

$\tan x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c$

$$d)\quad \tan^2 y\ dy = \sin^3 x\ dx$$

هذا جاهز معزول بس يحتاج تكامل مباشر.
الايسر نحول الايمن نسحب ثم فيثاغورس .

$\int \sec^2 y - 1\, dy = \int \sin^2 x\ \ \sin x\, dx$

نحول حسب فيثاغور ثم ندخل خارج القوس . بعد اخيك راجع التكامل .

$\int \sec^2 y - 1\, dy = \int (1-\cos^2 x)\ \ \sin x\, dx$

$\int \sec^2 y - 1\, dy$

$= \int \sin x - \cos^2 x\ \ \sin x\, dx$

نوفر مشتقة cosx حسب قاعدة 11 نحتاج سالب .
الايسر جاهز بالقواعد العشرة .

$\int \sec^2 y - 1\, dy$

$= \int \sin x + \cos^2 x\ (-\sin x)\, dx$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

$$g)\quad e^{x+2y} + y' = 0$$

ننقل ونحول ونجزيء

$\frac{dy}{dx} = -e^x . e^{2y} \quad]dx \ \rightarrow\ dy = -e^x . e^{2y} dx$

نسحب جماعة y

$\int \frac{dy}{e^{2y}} = \int e^x\ dx$

$\int e^{-2y}\, dy = \int e^x\ dx$

نوفر مشتقات الدوال الاسية .

$-\frac{1}{2}\int e^{-2y} \qquad -2\, dy = \int e^x\ dx$

$-\frac{1}{2}e^{-2y} = e^x + c \qquad]-2$

$=-2e^x - 2ce^{-2y}$

$=-2e^x + c1e^{-2y}$

$$c)\quad x\cos^2 y\ dx + \tan y\ dy = 0$$

لازم نسويهم طرفين هاي قاعدة . عدنا مقداربيه y صاير يم dx لازم نحوله .

$x\cos^2 y\ \ dx = -\tan y\ dy$

من سويت طرفين هسه نسحب .

$xdx = -\frac{\tan y}{\cos^2 y}dy$

$xdx = -\ \tan y\ \ \sec^2 y\, dy$

هسه نكامل بحيث الطرف الايمن تكامل قوس ومشتقته والايسر عادي .

$\int xdx = -\int \tan y \qquad \sec^2 y\, dy$

$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}\tan^2 y + c$

$$e)\ yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$$

نحول و نسحب .

$$y\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{(y^2+1)^3} \quad]\times dx$$

ثم نسحب

$$ydy = 4\sqrt{(y^2+1)^3}\ dx$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{(y^2+1)^3}} = 4\ dx$$

هسه نكامل .

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{(y^2+1)^3}} = \int 4dx$$

الايسر نصعد المقام والبسط مشتقة بس يحتاج 2 والايمن كبل .

$$\frac{1}{2}\int (y^2+1)^{-\frac{3}{2}}\quad 2ydy = \int 4dx$$

$$\frac{1}{2}\ \frac{-2}{1}(y^2+1)^{-\frac{1}{2}} = 4x+c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{y^2+1}} = 4x+c$$

انتهى الحل .

$$b)\ \sin x\ \cos y\ \frac{dy}{dx} + \cos x\ \sin y = 0$$

ننقل حتى نسوي طرفين .

$$\sin x\ \cos y\frac{dy}{dx} = -\cos x\ \sin y \quad]\times dx$$

$$\sin x\ \cos y dy = -\cos x\ \sin y\ \ dx$$

نسحب كل احد لجهته .

$$\frac{\cos y\ \ dy}{\sin y} = -\frac{\cos x\ \ dx}{\sin x}$$

$$\cot y\ \ dy = -\cot x\ dx$$

$$\int \cot y\ \ dy = -\int \cot x\ dx$$

هسه نكامل بالقواعد العشرة .

$$\ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + c$$

انتهى الحل . بس اذا تريد تكمل تبسيط بكيفك

$$\ln|\sin y| = \ln|(\sin x)^{-1}| + c$$

$$\ln|\sin y| = \ln\left|\frac{1}{\sin x}\right| + c$$

ناخذ e للطرفين فتحذف ln وتتغير c

$$\sin y = c1\frac{1}{\sin x}$$

$$\sin y\ \sin x = c1$$

ملاحظة اذا لكيت عندك ثلاثة حدود بالمعادلة التفاضلية شلون نحل ؟

انقل كل الاطراف لجهة واترك الي بيه مشتقة بجهة ثانية اخذ عامل مشترك للي ماعدهم مشتقة او جمع و طرح تجمعهم .

ثم ابدا بخطوات الحل مالتك القديمة مالت تحويل كذا و عزل المتغيرات بالسحب .

$$b)\ \frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad , \qquad x=1\ ,\ y=2$$

انقل الى الجهة الثانية الي مابيهم مشتقة .

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy \qquad \to \frac{dy}{dx} = x(3-y) \quad]dx \qquad\qquad dy = x(3-y)dx$$

نسحب للطرف الثاني

$$\frac{dy}{3-y} = xdx$$

هسه نكامل الايسر يحتاج بس مشتقة المقام فوك يصير تكامل ln الثاني كلاوات .

$$\int \frac{dy}{3-y} = \int xdx \qquad -\int \frac{-1dy}{3-y} = \int xdx$$

$$-ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$

هسه نعوض قيم x=1 y=2

$$-ln|3-2| = \frac{1}{2}1^2 + c \qquad -ln1 = \frac{1}{2} + c \qquad 0 = \frac{1}{2} + c \qquad c = -\frac{1}{2}$$

الحل النهائي

$$-ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

نبسط الحل اكثر .نضربها بسالب ناخذ ln للطرفين .

$$|3-y| = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2} \qquad y = 3 - e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2}$$

---

a) $xy\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2 \qquad \rightarrow xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \quad]dx \qquad \rightarrow \quad xy\,dy = (1-2y^2)dx$$

هسه نسحب

$$\frac{ydy}{1-2y^2} = \frac{dx}{x}$$

الطرفين ln بس نقص عدهم .

$$-\frac{1}{4}\int \frac{-4ydy}{1-2y^2} = \int \frac{dx}{x} \qquad -\frac{1}{4}ln|1-2y^2| = ln|x| + c \quad]-4$$

انتهى الحل .واذا تريد تكمل بكيفك.

$$ln|1-2y^2| = -4ln|x| - 4c \qquad e \qquad e^{ln|1-2y^2|} = e^{lnx^{-4}}.e^{-4c}$$

$$|1-2y^2| = \frac{c1}{x^2} \qquad 1-2y^2 = \pm\frac{c1}{x^2} \qquad 2y^2 = 1 \mp \frac{c1}{x^2}$$

g) $y' = 2e^x y^3 , \qquad x=0, y=\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \quad]dx \quad \rightarrow \quad dy = 2e^x y^3 dx$ نسحب

$\frac{dy}{y^3} = 2e^x dx$ نكامل $\int \frac{dy}{y^3} = \int 2e^x dx \qquad \int y^{-3}\, dy = 2\int e^x dx$

$\frac{-1}{2} y^{-2} = 2e^x + c \qquad \frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$

هسه نعوض قيم x ,y

$\frac{-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2e^0 + c \qquad -2 = 2 + c \qquad c = -4$

$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4 \quad] -2 \qquad \frac{1}{y^2} = 8 - 4e^x$

---

15 . حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -2x\tan y$ حيث ان $x = 0$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$.

$\frac{dy}{dx} = -2x\tan y \quad]dx \qquad dy = -2x\tan y\, dx$ نسحب $\frac{dy}{\tan y} = -2xdx$

نكامل $\int \frac{\cos y\ dy}{\sin y} = \int -2xdx \qquad ln|\sin y| = -x^2 + c$

هسه نعض قيم x,y

$ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 0 + c \qquad ln1 = c \qquad c = 0$

اذن الحل هو :-

$ln|\sin y| = -x^2$ e للطرفين $\sin y = e^{-x^2}$

14 . حل المعادلة التفاضلية الآتية $y' = \frac{\cos^2 y}{x}$, $y = \frac{\pi}{4}, x = 1$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{x}$]dx همينا نسحب $\frac{dy}{cos^2 y} = \frac{dx}{x}$

نكامل $\int sec^2 y\, dy = \int \frac{dx}{x}$ $tany = ln|x| + c$

هسه نعض قيم x,y

$tan\frac{\pi}{4} = ln|1| + c$ $1 = 0 + c$ $c = 1$

اذن الحل هو :-

$$tany = ln|x| + 1$$

ثانياً : المعادلة التفاضلية المتجانسة Homogeneous Differential Equation

اذا لكيت $(x^n \mp y^m)$ يعني بينهم جمع او طرح فهاي ما تكدر تعزلهم لو تموت . جا الحل شون ؟

هيج معادلات تنحل بطرق غير العزل هي المتجانسة .

شلون نعرف انها متجانسة . تعوض مكان كل x,y المقدار $y \to ty$ و $x \to tx$ واذا طلعن كل الحدود بيهن t مرفوعة لنفس الاس او تم اختصار نهائيا فان المعادلة متجانسة.

او اكو طريقة ثانية بدن تعويض بس تطك المعادلة بنظرة تتخربط وتكلك شنو نوعها . شون ؟

اذا كل الحدود متساوية الاس بحيث اذا لكيت (x.y) مضربات تجمع الاس مالتهم وتعتبره اس احد وطلعن متساويات مع الباقيات نكول متجانسة .

امثلة :-

$$(x^4 + y^4)\frac{dy}{dx} = x^3 y$$

متجانسة من الدرجة الرابعة لان كل الحدود اسها = 4 لان الحد الاول والثاني اسهم = 4 والثالث بعد جمع الاس=٤

اذا عوضنا حسب الطريقة الاولى راح يطلع كلهن بيهن t^4.

$$((tx)^4 + (ty)^4)\, y' = (tx)^4(ty) \quad \to (t^4x^4 + t^4y^4)y' = t^4x^3y$$

اذن المعادلة متجانسة .

$$2xyy' - y^2 + 2x^2 = 0$$

المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية لان كل الحدود اسها =2 لان الحد الاول بعد جمع الاس والثاني والثالث اسهم =2

اذا عوضنا حسب الطريقة الاولى راح يطلع كلهن بيهن t^2.

$$2tx.ty\,y' - (ty)^2 + 2(tx)^2 = 0 \quad \to\to\to\ 2t^2xy\,y' - t^2x^2 + 2t^2y^2 = 0$$

اذن المعادلة متجانسة.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 - y}{x^3}$$

المعادلة ليست متجانسة لان المقام درجة ثالثة والحد الاول بالبسط درجة ثانية والحد الثاني درجة اول .

خطوات حل المعادلة المتجانسة

- اجعل المشتقة $\frac{dy}{dx}$ بوحدها بطرف والباقي شلع قلع للجهة الثانية .
- نقسم المعادلة على x^n بحيث n هو درجة المعادلة المتجانسة يعني الاس الاكبر. واذا صارت كل الحدود بصورة $\frac{y}{x}$ فان المعادلة متجانسة .
- نفرض هذا المقدار ب $v = \frac{y}{x}$ نجد مشتقته التي تساوي $\left[\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}\right]$.
- نعوض هذين المقدارين بالمعادلة المتجانسة.
- بعد التعويض راح تصير عندك معادلة تنحل بالطريقة القديمة. طريقة العزل.
  - لازم تنقل كل المقادير الي ما يهمهم المشتقة الى الطرف الثاني.
  - تجمع او تطرح ومن ثم تضرب ب dx
  - نسحب جماعة v الى dv كذلك جماعة x
  - نضع التكامل نكامل.
- بعد التكامل ارفع v وضع مكانها ما تساوي $v = \frac{y}{x}$. ثم بسط المعادلة قليلا. إذا تريد تبسط للنهاية فانت واحد معدل اذا تكتفي بالتبسيط البسيط بكيفيك.

أكبر كذبة مارستها البشرية على نفسها هو الامل.

لذلك لا تأمل بشيء، امض بقوة فقط.

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$ حل المعادلة التفاضلية

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثانية .في البسط المقام .نقسم على x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - 1}{\frac{2y}{x}}$$

نفرض

$$v = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

نعوض

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$ ننقل v $$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v$$

نصفي الطرف الأيمن دائما .توحيد مقامات بطريقة المقص .

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

هسه نقلب الأيمن ونحوله للايسر وكذلك الايسر نقلبه ونحوله للايمن . دائما .اوكن .

$$\frac{2vdv}{v^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم .

$$\int \frac{2vdv}{v^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} \qquad ln|v^2 - 1| = ln|x| + c \qquad e$$

$$e^{ln|v^2-1|} = e^{ln|x|} \cdot e^c \qquad v^2 - 1 = \pm c1x$$ عوض $$v = \frac{y}{x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = \pm c1x \qquad]x^2 \qquad y^2 - x^2 = \pm c_1x^3 \qquad y^2 = x^2 \pm c_1x^3$$

وشكرا للناصرية .طبعا تكدر تكمل بعد تاخذ الجذر للطرفين كذا . بس شلك بهيج فيكات كذا .

حل المعادلة التفاضلية $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثانية .نجعل المشتقة وحدها .

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad \div x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 1}{\frac{2y}{x}}$$

نفرض

$$v = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

نعوض وننقل v

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v$$

نصفي الأيمن .

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2 - 1}{2v}$$

هسه نقلب وننقل

$$\frac{2vdv}{v^2 + 1} = -\frac{dx}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم .

$$\int \frac{2vdv}{v^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} \qquad ln|v^2 + 1| = -ln|x| + c$$

$$ln|v^2 + 1| = ln|x|^{-1} + c \qquad ln|v^2 + 1| = ln\frac{1}{|x|} + c \qquad e$$

$$e^{ln|v^2+1|} = e^{ln\frac{1}{|x|}} . e^c \qquad v^2 + 1 = \pm\frac{c}{x}$$

عوض $v = \frac{y}{x}$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \pm\frac{c}{x} \quad]x^2 \qquad y^2 + x^2 = \pm c_1 x \qquad y^2 = -x^2 \pm c_1 x^3$$

وشكرا للناصرية .طبعا تكدر تكمل بعد تاخذ الجذر للطرفين كذا .بس شلك بهيج فيكات كذا .

مثال – 4 – جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثانية. نجعل المشتقة وحدها

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x^2}{2x^2} \qquad \div x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2}$$

نفرض

$$v = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

نعوض ثم ننقل v

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2} - v$$

نصفي الايمن

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2 - 2v}{2} = \frac{v^2 - 2v + 1}{2} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{(v-1)^2}{2}$$

هسه نقلب

$$\frac{2dv}{(v-1)^2} = \frac{dx}{x}$$

هسه تكامل الايمن ln الايسر يصعد. تصير بطريقة القوس

$$\int \frac{2dv}{(v-1)^2} = \int \frac{dx}{x} \qquad 2\int (v-1)^{-2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$2 \times \frac{1}{-1}(v-1)^{-1} = ln|x| + c \qquad \frac{-2}{v-1} = ln|x| + c$$

ومن قلب التناسب

$$\frac{v-1}{-2} = \frac{1}{c + ln|x|} \qquad v - 1 = \frac{-2}{c + ln|x|} \qquad \text{عوض} \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} - 1 = \frac{-2}{c + ln|x|} \qquad \times x \qquad y - x = \frac{-2}{c + ln|x|}$$

$$y = \frac{-2}{c + ln|x|} + x$$

1. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

المعادلة متجانسة ومقسمة وجاهزة بس نفرض ونعوض.

نفرض

$v = \frac{y}{x}$ $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

نعوض

$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^v$ $x\frac{dv}{dx} = v - v + e^v$

$x\frac{dv}{dx} = e^v$

هسه نقلب

$\frac{dv}{e^v} = \frac{dx}{x}$ $e^{-v}dv = \frac{dx}{x}$

هسه تكامل الايمن ln الايسر دالة اسية

$\int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x}$ $-\int e^{-v} \times -dv = \int \frac{dx}{x}$

$-e^{-v} = ln|x| + c$ $\frac{-1}{e^v} = ln|x| + c$ $\times -1$ $\rightarrow$ $\frac{1}{e^v} = -ln|x| - c$

ومن قلب التناسب

$e^v = \frac{1}{c1 - ln|x|}$ عوض $v = \frac{y}{x}$

$e^{\frac{y}{x}} = \frac{1}{c1 - ln|x|}$

معلومة

$e^{-n\ln|u|} = e^{\ln\frac{1}{u^n}} = \frac{1}{u^n}$ $e^{-n\ln|u|} = \frac{1}{u^n}$

7. $x(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}) = y$

المعادلة متجانسة ومقسمة وجاهزة بس نفرض ونعوض .فقط نقسم المعادلة ع x

$$\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = tan\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$$

نفرض

$$v = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

نعوض

$$v + x\frac{dv}{dx} = tanv - v \qquad x\frac{dv}{dx} = tanv$$

$$x\frac{dv}{dx} = tanv$$

هسه نقلب

$$\frac{dv}{tanv} = \frac{dx}{x} \qquad \frac{cosvdv}{sinv} = \frac{dx}{x}$$

هسه تكامل الايمن ln الايسرايضا .

$$\int \frac{cosvdv}{sinv} = \int \frac{dx}{x}$$

$$ln|sinv| = ln|x| + c \quad \to \quad e \quad \to \quad e^{ln|sinv|} = e^{ln|x|}.e^{c} \quad \to \quad sinv = \pm c_1 x$$

$sin\frac{y}{x} = \pm c_1 x$ عوض $v = \frac{y}{x}$

اذا كنت تريد السعادة، لا تأمل بشيء. يمكنك ان تكون انسانا ناجحا بالجد والاجتهاد ولا عليك بالآمال والامنيات التي تحبطك كل يوم.

الاماني أحلام مزعجة ، عش كما انت وناضل بقوة في هذه الحياة واخلق الفرص . ولا تنسى ان الامل كذبة .

مثال – 2– حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الاولى في البسط المقام. بالقسمة على x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\left(\frac{y}{x}-1\right)}$$

نفرض

$$v=\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

نعوض

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}$$

ننقل v

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}-\mathrm{v}$$ توحيد $$x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1-v(v-1)}{v-1} \rightarrow x\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{v+1+v-v^2}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$

هسه نقلب

$$\frac{v-1\,dv}{2v-v^2+1}=\frac{dx}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم. بس الايسر يحتاج 2 للبسط حتى يصير مشتقة للمقام.

$$\int\frac{v-1\,dv}{2v-v^2+1}=\int\frac{dx}{x} \qquad \frac{1}{2}\int\frac{2v-2\,dv}{2v-v^2+1}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\,ln|2v-v^2+1|=ln|x|+c \qquad \times 2 \qquad ln|2v-v^2+1|=2ln|x|+2c \qquad]\,e$$

$$e^{ln|2v-v^2+1|}=e^{lnx^2}\,.\,e^{2c} \qquad 2v-v^2+1=\pm c1x^2$$ عوض $$v=\frac{y}{x}$$

$$2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\pm c1x^2 \qquad]x^2 \qquad 2yx-y^2+x^2=\pm c_1x^3$$

مثال – 3–

حل المعادلة $(3x-y)y' = x+y$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الأول

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}+1\right)}{\left(3-\frac{y}{x}\right)}$$

نفرض

$$v = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

نعوض

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{3-v}$$

ننقل v

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{3-v} - \mathrm{v}$$

توحيد

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v(3-v)}{3-v} \rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-3v+v^2}{v-1} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v}$$

هسه بالقلب

$$\frac{3-v\,dv}{v^2-2\mathrm{v}+1} = \frac{\mathrm{dx}}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم. بس الايسر يحتاج 2 للبسط حتى يصير مشتقة للمقام.

$$\int \frac{3-v\,dv}{v^2-2\mathrm{v}+1} = \int \frac{\mathrm{dx}}{x}$$

الايسر لا يمثل مشتقة ولا كل الطرق تنفع وياه . لذلك افضل طريقة هي تجزئة البسط . هاي الطريقة جديدة ٢٠٠٠ وهسه .

باع شون نسويها نفصخ البسط لما يصير مشتقة :-

$$\int \frac{-(v-3)dv}{v^2-2\mathrm{v}+1} = \int \frac{\mathrm{dx}}{x} \qquad \int \frac{-(v-1-2)\,dv}{v^2-2\mathrm{v}+1} = \int \frac{\mathrm{dx}}{x}$$

$$\int \frac{-(v-1)\,dv}{v^2-2\mathrm{v}+1} + \frac{2\,dv}{v^2-2\mathrm{v}+1} = \int \frac{\mathrm{dx}}{x}$$

$$-\int \frac{v-1\,dv}{v^2-2v+1}+2\int \frac{dv}{(v-1)^2}=\int \frac{dx}{x}$$

راح يصير الحد الاول البسط مشتقة للمقام بس يحتاج 2 . الحد الثاني قوس يرفع . الايمن لوغارتيم .

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2v-2\,dv}{v^2-2v+1}+2\int (v-1)^{-2}\,dv=\int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|v^2-2v+1|+2.\frac{1}{-1}(v-1)^{-1}=\ln|x|+c \qquad]\times -2$$

$$\ln|v^2-2v+1|+\frac{4}{v-1}=-2\ln|x|-2c \quad \text{عوض} \quad v=\frac{y}{x}$$

$$\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}+1\right|+\frac{4}{\frac{y}{x}-1}=-2\ln|x|+c1$$

انتهى.

==

2. $(y^2-xy)dx+x^2dy=0$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثانية] ملاحظة اذا لكيت بالمعادلة المتجانسة قيمة dx معزولة عن dy ما يصير لازم تقسم على dx بعدين تكمل خطوات الحل [

$$(y^2-xy)dx+x^2dy=0 \qquad \div dx \qquad (y^2-xy)+x^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=xy-y^2 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2} \qquad \div x^2 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}}{1}$$

نفرض

$$v=\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

نعوض

$$v+x\frac{dv}{dx}=v-v^2 \qquad x\frac{dv}{dx}=v-v^2-v \qquad x\frac{dv}{dx}=-v^2$$

هسه بالقلب

$$\frac{dv}{v^2}=-\frac{dx}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم للأيمن والايسر يصعد .

$$\int v^{-2}\,dv = -\int \frac{dx}{x} \qquad -\ v^{-1} = -ln|x| + c \qquad]-1$$

$$\frac{1}{v} = ln|x| - c \qquad \text{عوض } v = \frac{y}{x} \qquad \frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

---

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثانية في البسط و المقام .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x^2}{2xy} \qquad \div x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}{2\frac{y}{x}}$$

نفرض

$$v = \frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

نعوض وننقل v ونصفي الطرف الأيمن

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+1}{2v} \qquad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+1}{2v} - v = \frac{v^2+1-2v^2}{2v} = \frac{1-v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$

هسه بالقلب

$$\frac{2v\,dv}{1-v^2} = \frac{dx}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم.

$$-\int \frac{-2v\,dv}{v^2-1} = \int \frac{dx}{x} \qquad -\ ln|1-v^2| = ln|x| + c \qquad \times -1$$

$$e^{ln|v^2-1|} = e^{-ln|x|}\,.\,e^{-c} \qquad 1 - v^2 = \pm\frac{c1}{x} \qquad \text{عوض} \qquad v = \frac{y}{x}$$

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \pm\frac{c1}{x} \qquad]x^2 \qquad x^2 - y^2 = \pm c_1 x$$

5. $(y^2-x^2)dx+xydy=0$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثانية] ملاحظة اذا لكيت بالمعادلة المتجانسة قيمة dx معزولة عن dy ما يصير لازم تقسم على dx بعدين تكمل خطوات الحل {

$$(y^2-x^2)dx+xydy=0 \qquad \div\ dx \quad \rightarrow\ y^2-x^2+xy\frac{dy}{dx}=0$$

$$xy\frac{dy}{dx}=x^2-y^2 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{xy} \quad \div\ x^2 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

نفرض

$$v=\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

نعوض وننقل v ثم نوحد مقامات .

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v} \qquad x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v}-v=\frac{1-v^2-v^2}{v}=\frac{1-2v^2}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v^2}{v}$$

نقلب

$$\frac{vdv}{1-2v^2}=\frac{dx}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم للأيمن والايسر همينا بس يحتاج 4- .

$$-\frac{1}{4}\int\frac{-4vdv}{1-2v^2}=-\int\frac{dx}{x} \qquad -\frac{1}{4}ln|1-2v^2|=ln|x|+c \quad]-4$$

$$ln|1-2v^2|=-4ln|x|-4c \qquad e$$

$$e^{ln|1-2v^2|}=e^{-4ln|x|}\,.\,e^{-4c} \qquad 1-2\,v^2=\pm\frac{c1}{x^4} \quad \text{عوض} \quad v=\frac{y}{x}$$

$$1-\ 2\left(\frac{y}{x}\right)^2=\pm\frac{c1}{x^4} \quad]x^4 \qquad x^4-y^2x^2=\pm c_1$$

6. $x^2ydx=(x^3+y^3)dy$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثالثة

١-بالبداية نجعل المشتقة وحدها $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}$.

٢-نقسم البسط والمقام على x^3. دائما .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^3}{x^3}}$$

٣-المعادلة متجانسة نفرض

$$v=\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

٤-نعوض ثم همينا نخلي المشتقة وحدها ونبسط الطرف الأيمن.

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+v^3}$$

٥-انقل v واترك المشتقة همينا لوحدها.

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+v^3}-v=\frac{v-v-v^4}{1+v^3}=\frac{-v^4}{v^3+1} \qquad x\frac{dv}{dx}=-\frac{v^4}{v^3+1}$$

٥-الان نقلب الطرف الأيمن ونرسله للايسر . ونقلب x و dx ونرسلهم للايمن

$$\frac{v^3+1}{v^4}dv=-\frac{dx}{x}$$

٦-نضع التكامل ونكامل حسب الطرق القيمة مالتنا.

$$\int\frac{v^3+1}{v^4}dv=-\int\frac{dx}{x} \qquad \int\frac{v^3}{v^4}+\frac{1}{v^4}\,dv=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{v}+v^{-4}\,dv=-\int\frac{dx}{x} \qquad lnv-\frac{1}{3}v^{-3}=-lnx+c$$

$$lnv-\frac{1}{3v^3}=-lnx+c$$

٧-نرفع v ونضع ما تساوي.

$$ln(\frac{y}{x})-\frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3}=-lnx+c$$

3. $(x+2y)dx+(2x+3y)dy=0$

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الاولى.

$$x+2y+(2x+3y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (2x+3y)\frac{dy}{dx}=-x-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-2y}{2x+3y} \qquad \div x \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-(1+\frac{2y}{x})}{2+\frac{3y}{x}}$$

نفرض

$$v=\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

نعوض

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{3v+2}$$

ننقل v

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{3v+2}-\text{v} \qquad \text{توحيد} \qquad x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-v(3v+2)}{3v+2} \rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-3v^2-2v}{3v+2} \qquad x\frac{dv}{dx}=\frac{-3v^2-4v-1}{3v+2}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-(3v^2+4v+1)}{3v+2}$$

هسه بالقلب

$$\frac{3v+2\,dv}{3v^2+4v+1}=-\frac{\text{dx}}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم .بس الايسر يحتاج ينضرب 2 للبسط حتى يصير مشتقة للمقام.

$$\frac{1}{2}\int\frac{6v+4\,dv}{3v^2+4v+1}=-\int\frac{\text{dx}}{x}$$

$$\frac{1}{2}ln\left|3v^2+4v+1\right|=-ln|x|+c \qquad]\times 2$$

$$ln\left|3v^2+4v+1\right|=-2ln|x|+2c \qquad \text{عوض} \qquad v=\frac{\text{y}}{\text{x}}$$

$e^{ln|3v^2+4v+1|} = e^{-2ln|x|} . e^{2c}$ $3v^2 + 4v + 1 = \mp \frac{c1}{x^2}$

عوض $v = \frac{y}{x}$

$3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\frac{y}{x} + 1 = \mp\frac{c1}{x^2}$ $\times x^2$

$3y^2 + 4xy + x^2 = \mp c1$

---

16. حل المعادلة التفاضلية $x\ y' = y - x$ حيث ان $x = 1, y = 1$.

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الاولى .

$x\frac{dy}{dx} = y - x$ $\div x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$

نفرض

$v = \frac{y}{x}$ $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

نعوض

$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1$ $x\frac{dv}{dx} = v - v - 1$ $x\frac{dv}{dx} = -1$

هسه بالسحب الى المقام وضرب بdx

$dv = -\frac{dx}{x}$

هسه تكامل $\int dv = -\int\frac{dx}{x}$

$v = -ln|x| + c$ عوض $v = \frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} = -\ln|x| + c$ $]x$ $y = -x\ln|x| + c$

عوض قيم   *x=1   y=1*

$1 = -1\ln|1| + c$ $1 = 0 + c$ $c = 1$

$y = -x\ln|x| + 1$ المعادلة

17. حل المعادلة التفاضلية الاتية $(x^2+3y^2)dx-2xy\,dy=0$.

المعادلة متجانسة لان الحدود من الدرجة الثانية

$$(x^2+3y^2)dx-2xydy=0 \qquad \div\ dx \quad \rightarrow (x^2+3y^2)-2xy\frac{dy}{dx}=0$$

$$-2xy\frac{dy}{dx}=-x^2-3y^2 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-x^2-3y^2}{-2xy} \quad \div -x^2 \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{3y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}}$$

نفرض

$$v=\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

نعوض

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v} \qquad x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}-v=\frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}$$

بالقلب

$$\frac{2vdv}{v^2+1}=\frac{\mathrm{dx}}{x}$$

هسه تكامل بطريقة اللوغارتيم للأيمن والايسر همينا.

$$\int\frac{2vdv}{v^2+1}=\int\frac{\mathrm{dx}}{x} \qquad ln|v^2+1|=ln|x|+c \qquad e$$

$$e^{ln|v^2+1|}=e^{ln|x|}.e^c \qquad v^2+1=\pm c1\,x \qquad \text{عوض} \quad v=\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=\pm c1x \qquad]x^2 \qquad y^2+x^2=\pm c_1x^2$$

مبرهنة (7):

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر

اي انه:

اذا كان $(X)\perp(Y)$

$(X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD}\subset(Y), \overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$

في D

فان $\overleftrightarrow{CD}\perp(X)$

المعطيات:

$(X)\perp(Y),\ (X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB},\ \overleftrightarrow{CD}\subset(Y), \overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD}\perp(X)$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD}\subset(Y), \overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \sphericalangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية (Y) – $\overleftrightarrow{AB}$ – (X) (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\sphericalangle CDE=90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

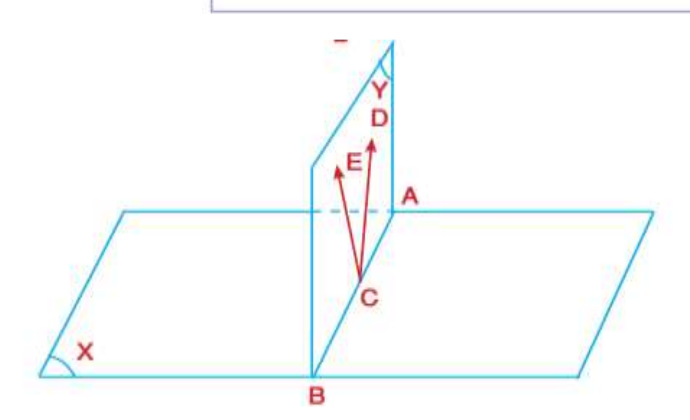
$\therefore \overleftrightarrow{CD}\perp(X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

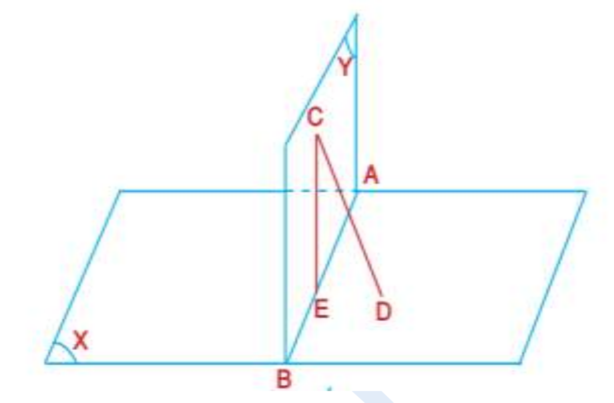
و.هـ.م

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

نتيجة مبرهنة (7):

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه.





المعطيات : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X), C \in (Y), (Y) \perp (X)$

المطلوب : $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهان : ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

(اذا تقاطع مستويان فأن مجموعة التقاطع مستقيم)

نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$ بحيث $\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Y) \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CE} \perp (X)$ (مبرهنة 7)

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CE} = \overleftrightarrow{CD}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمود على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

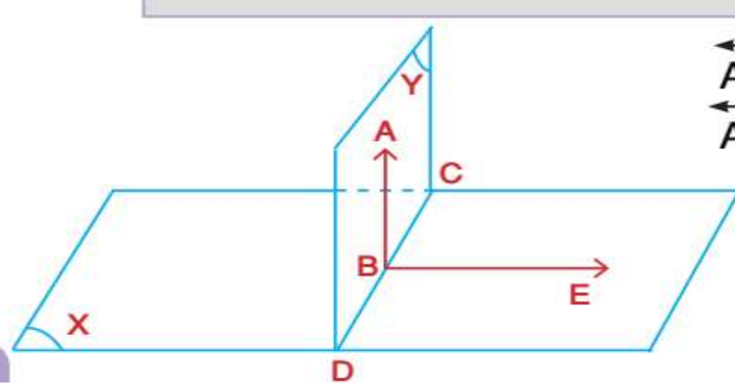
(و.هـ.م .)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

مبرهنة (8):

كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي

أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر



اي انه:

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AB}\perp(X)\\ \overleftrightarrow{AB}\subset(Y)\end{array}\right\}\Rightarrow(Y)\perp(X)$$

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB}\perp(X)$

$\overleftrightarrow{AB}\subset(Y)$

المطلوب اثباته:

$(Y)\perp(X)$

البرهان:

ليكن $(X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B\in\overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE}\perp\overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because\ \overleftrightarrow{AB}\perp(X)$ (معطى)

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{CD},\overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\because\ \overleftrightarrow{AB}\subset(Y)$ (معطى)

$\therefore\ \sphericalangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m\sphericalangle ABE=90^\circ$ (لان $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y)-\overleftrightarrow{CD}-(X)=90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

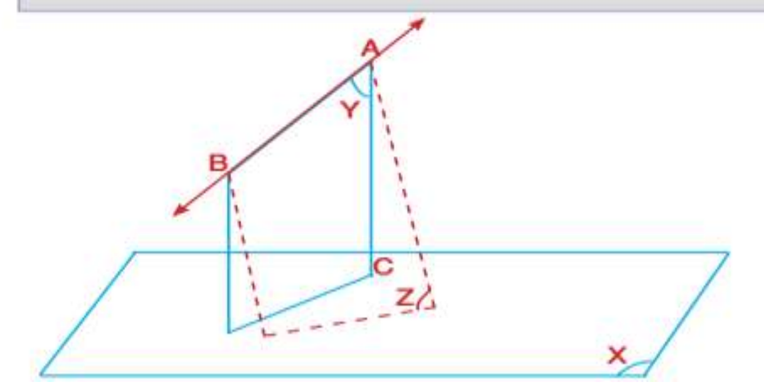
$\therefore (Y)\perp(X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

مبرهنة (9):

من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم.



اي انه:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$

وعمودي على (X)

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته:

ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان:

من نقطة (A) نرسم $(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية:

ليكن (Z) مستوي اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

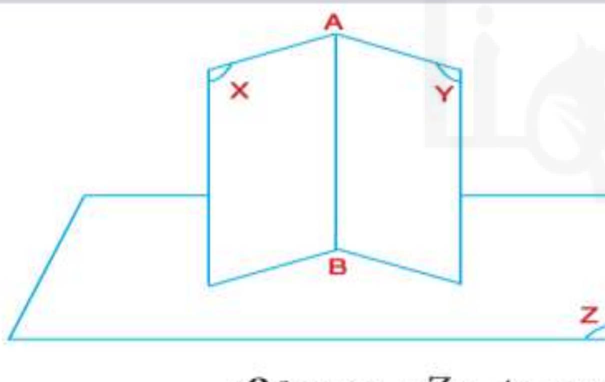
$\because$ $(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$ (بالبرهان)

$\therefore$ $(Z) \subset \overleftrightarrow{AC}$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Z) = (Y)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و.هـ.م

نتيجة مبرهنة (9):

اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X), (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

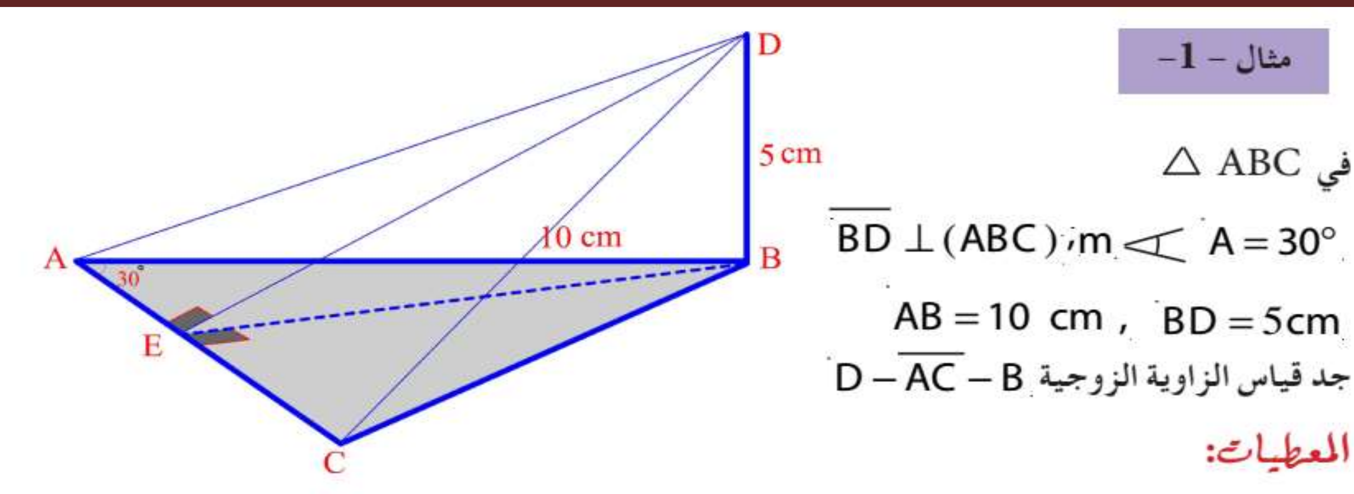
ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ و.هـ.م

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

مثال - 1-



في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\measuredangle A = 30°$

$AB = 10\ cm$ ، $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\measuredangle BAC = 30°$ ، $AB = 10\ cm$, $BD = 5\ cm$

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \measuredangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E

$$\sin 30° = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\measuredangle BED = 45°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45°$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و . هـ . م

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

مثال – 2 –

ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن ان:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات :

$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب اثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

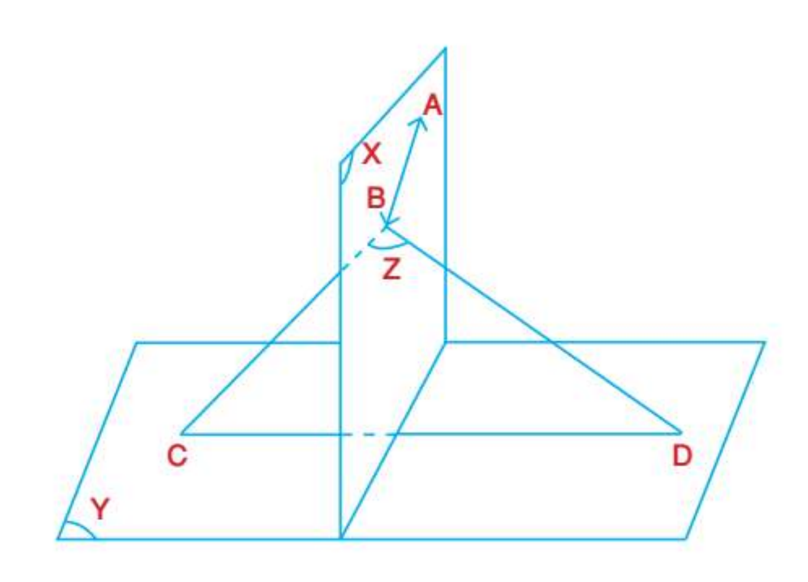
$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و. هـ. م

مثال - 3-



$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

برهن ان:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات:

إن $(Y) \perp (X)$، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عمودين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

بما ان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $(Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (لانه محتوى في كل منهما)

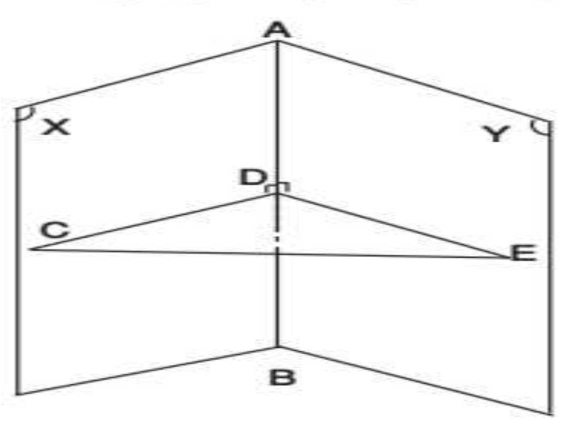
$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و. هـ. م

تمارين (1–6)

س1 :برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .



المعطيات :

CDE زاوية عائدة للزاوية الزوجية

$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

المطلوب : $(CDE)\perp\overleftrightarrow{AB}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$

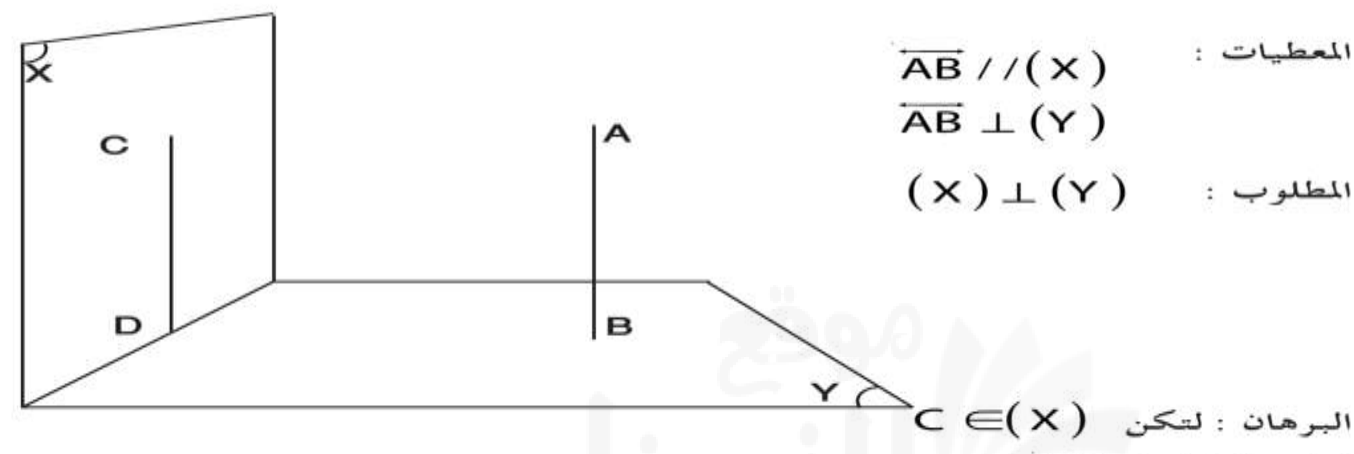
$\overleftrightarrow{ED}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore (CDE)\perp\overleftrightarrow{AB}$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

(و.هـ.م.)

س2 :برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فان المستويين متعامدان .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB}//(X)$

$\overleftrightarrow{AB}\perp(Y)$

المطلوب : $(X)\perp(Y)$

البرهان : لتكن $C\in(X)$

نرسم $\overleftrightarrow{CD}\perp(Y)$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB}\perp(Y)$ (معطى) $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$

(المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

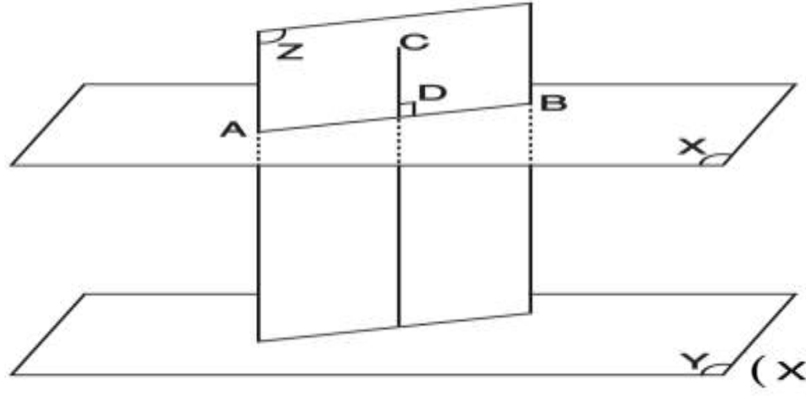
$\because C\in(X)\Rightarrow\overleftrightarrow{CD}\subset(X)$

اذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي)

$\therefore (X)\perp(Y)$ (مبرهنة 8)

(و.هـ.م.)

س3 :برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً .



المعطيات : $(X)//(Y), (Z)\perp(X)$

المطلوب : $(Z)\perp(Y)$

البرهان : ليكن $(Z)\cap(X)=\overleftrightarrow{AB}$ (اذا تقاطع مستويان فان المجموعة التقاطع مستقيم)

لتكن $C\in(Z)$ ، نرسم $\overleftrightarrow{CD}\subset(Z)$ بحيث $\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد : يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (Z)\perp(X)$ (معطى) $\Rightarrow \overleftrightarrow{CD}\perp(X)$ (مبرهنه 7)

$\because (X)//(Y)$ (معطى) $\Rightarrow \overleftrightarrow{CD}\perp(Y)$

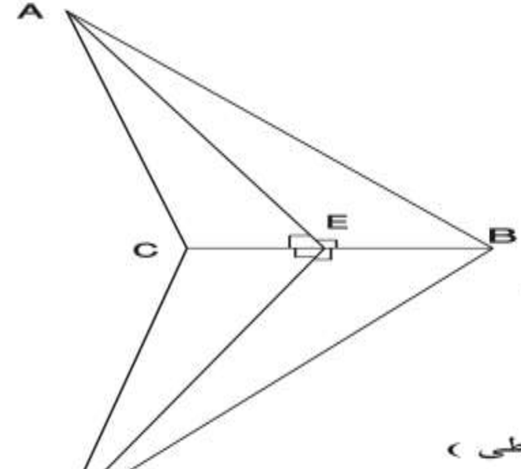
(المستقيم العمود على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore (Z)\perp(Y)$ (مبرهنه 8)

(و.هـ.م.)

س4: A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $E\in\overline{BC}, AB=AC$

فاذا كانت $\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$ برهن ان $CD=BD$.



المعطيات : A,B,C,D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد

$E\in\overline{BC}, AB=AC$

$\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$

المطلوب : $CD=BD$

البرهان : في ΔABC $AB=AC$ (معطى)

$\because \overline{AE}\perp\overline{BC}$ (تعريف العائدة)

$\therefore E$ منتصف $\overline{BC}$

(العمود المرسوم من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

في المثلثين CED, BED

$\overline{DE}$ (مشترك)

$CE=BE$ (بالبرهان)

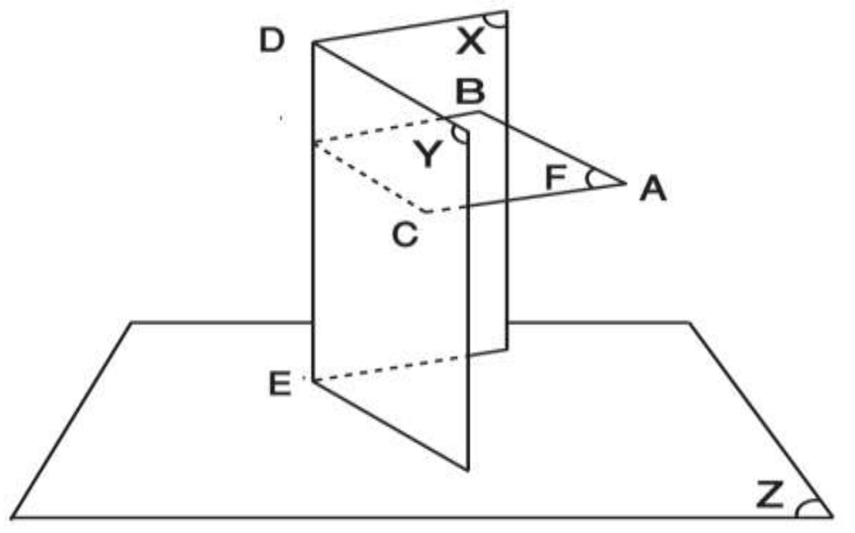
$\sphericalangle BED=\sphericalangle CED$ قوائم (تعريف العائدة)

$\therefore$ يتطابق المثلثان (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

وينتج $CD=BD$ (و.هـ.م.)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

س5 :برهن اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فأن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .



المعطيات :

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC} // (Z)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X), \overleftrightarrow{AC} \perp (Y), (X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{DE}$

المطلوب :

$\overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$

لبرهان :

$\because \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان

∴ يوجد مستوٍ وحيد مثل (F) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore (F) // (Z)$

(اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً فان مستو يهما يوازي ذلك المستوي)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (X)$

مبرهنة (8)

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (Y)$ (معطى) $\Rightarrow (F) \perp (Y)$

$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (F)$ (نتيجة مبرهنة 8)

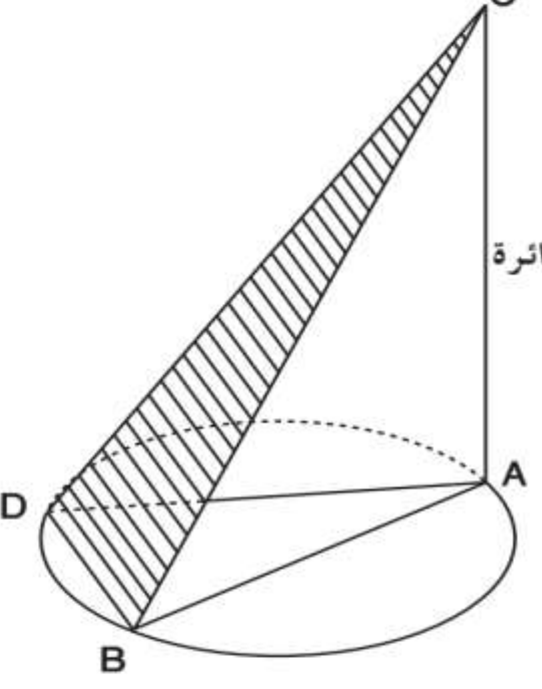
$\therefore \overleftrightarrow{DE} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

(و.هـ.م.)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

س6: دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .



المعطيات : دائرة قطرها $\overline{AB}$

$\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب : $(CDA) \perp (CDB)$

البرهان :

$\because \overline{AB}$ قطر الدائرة (معطى)

$\therefore \measuredangle ADB = 90^0$

(الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة)

$\because \overline{AC} \perp (ADB)$ (معطى)

$\overline{AD} \perp \overline{DB}$ بالبرهان

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \overline{DB} \perp (CDA)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

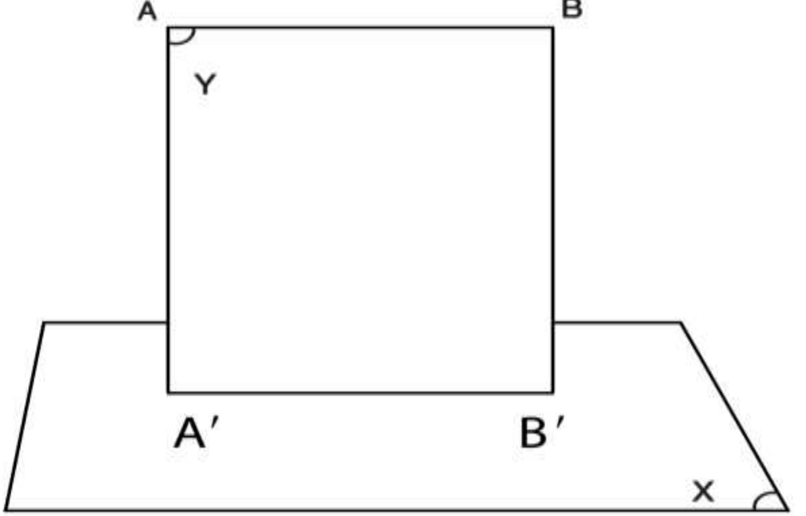
$\therefore (CDA) \perp (CDB)$ (مبرهنة 8)

(و.هـ.م.)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

تمارين (2-6)

س1 :برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .



المعطيات : $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X), $\overline{AB}//(X)$

المطلوب : $\overline{AB}//\overline{A'B'}$, $AB = A'B'$

البرهان : $\because \overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$ عمودان على (X) (تعريف المسقط)

$\therefore \overleftrightarrow{AA'}//\overleftrightarrow{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

نعين المستوي (Y) بالمستقيمين المتوازيين $\overleftrightarrow{AA'}$ ، $\overleftrightarrow{BB'}$ $\therefore$

(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\because \overline{AB}//(X)$ (معطى)

$\overline{AB}//\overline{A'B'}$

(اذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم)

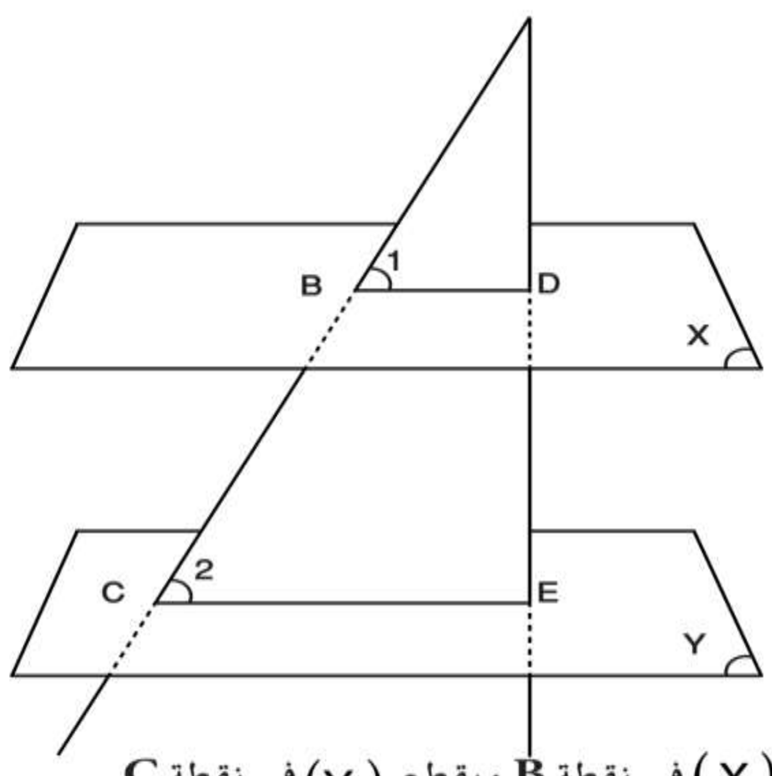
$\therefore ABB'A'$ متوازي اضلاع (لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه)

(يتساوى طولا الضلعين المتقابلين في متوازي الاضلاع) $\therefore AB = A'B'$

(و.هـ.م.)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

س2 :برهن أن إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .



المعطيات : $(Y)//(X)$, $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (X) في نقطة B ويقطع (Y) في نقطة C

المطلوب : ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي من نقطة معلومة) أذن $\overleftrightarrow{AD} \perp (Y)$ في E

(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الاخر)

$\therefore \overline{DB}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{EC}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y) (تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) (زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

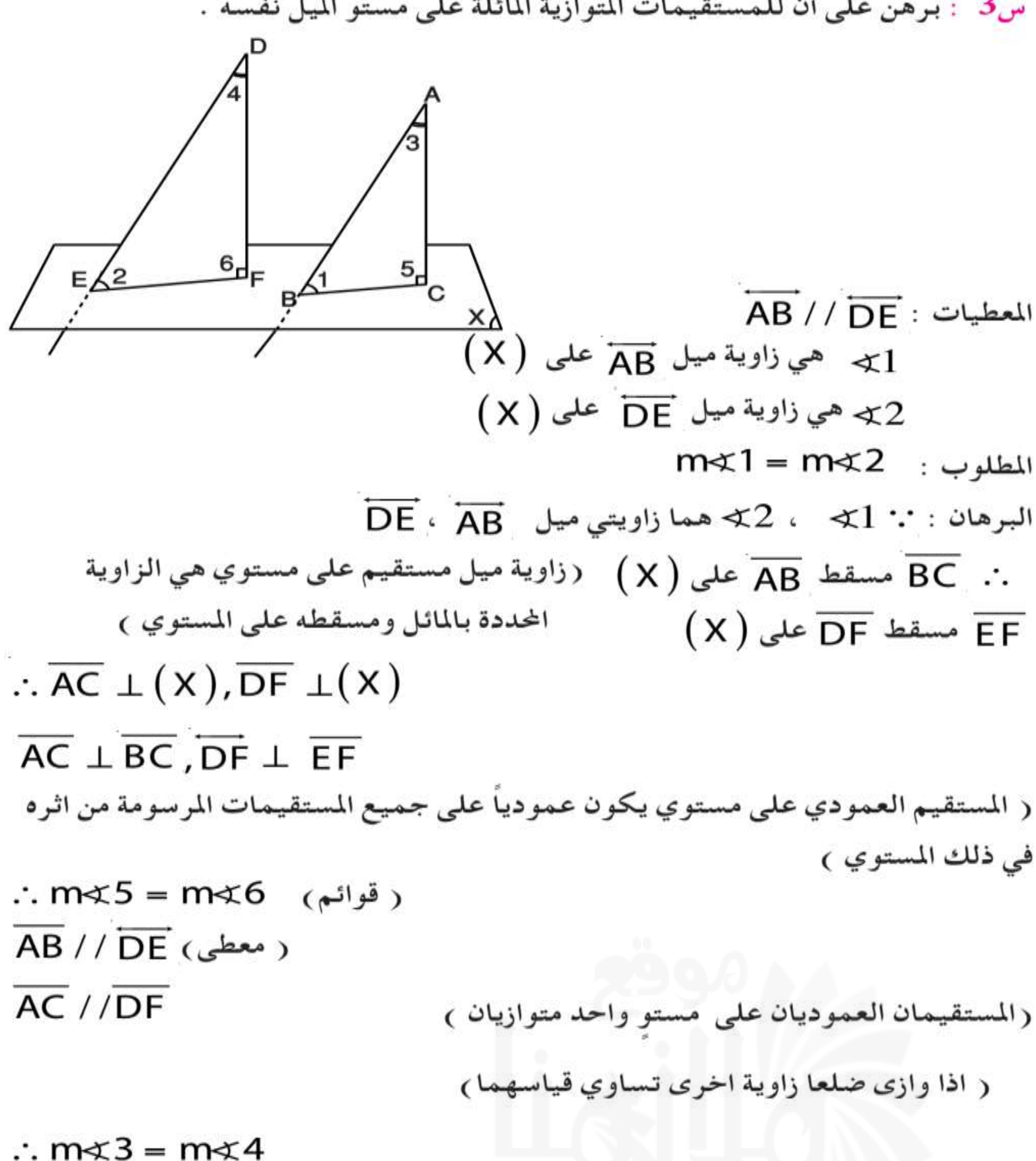
$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (متناظرة)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y) (و.هـ.م.)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

س3 : برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DE}$

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{DE}$ على (X)

المطلوب : $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$

البرهان : $\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{DE}$

$\therefore$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية

$\overline{EF}$ مسقط $\overline{DF}$ على (X) المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\therefore \overline{AC} \perp (X), \overline{DF} \perp (X)$

$\overline{AC} \perp \overline{BC}, \overleftrightarrow{DF} \perp \overline{EF}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره في ذلك المستوي)

$\therefore m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6$ (قوائم)

$\overline{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DE}$ (معطى)

$\overline{AC} \,//\, \overline{DF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

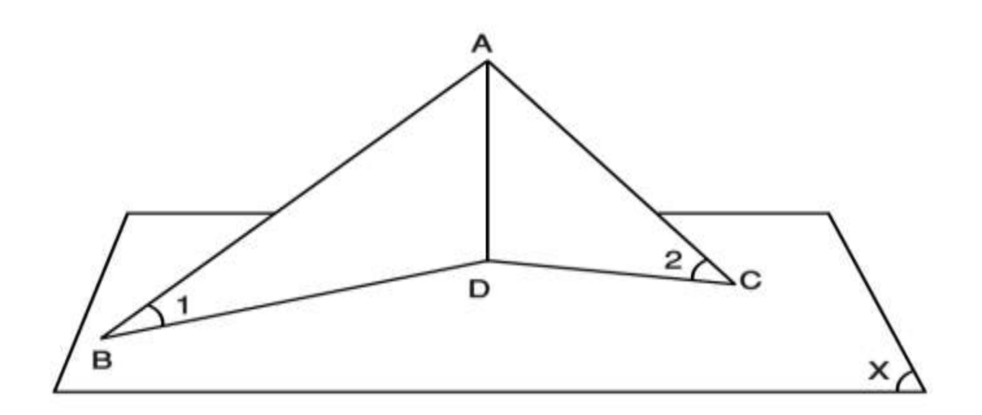
(اذا وازى ضلعا زاوية اخرى تساوي قياسهما)

$\therefore m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$

$\therefore m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (لان مجموع زوايا المثلث 180^0) (و.هـ.م)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

س4 :برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ مائلان على (X) ، $AB > AC$

المطلوب : زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) أصغر من زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$

(يمكن رسم عمود واحد فقط على مستوٍ من نقطة معلومة)

فيكون $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودي على مستوي هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

(زاوية الميل : هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\because AB > AC$ (معطى)

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التباين)

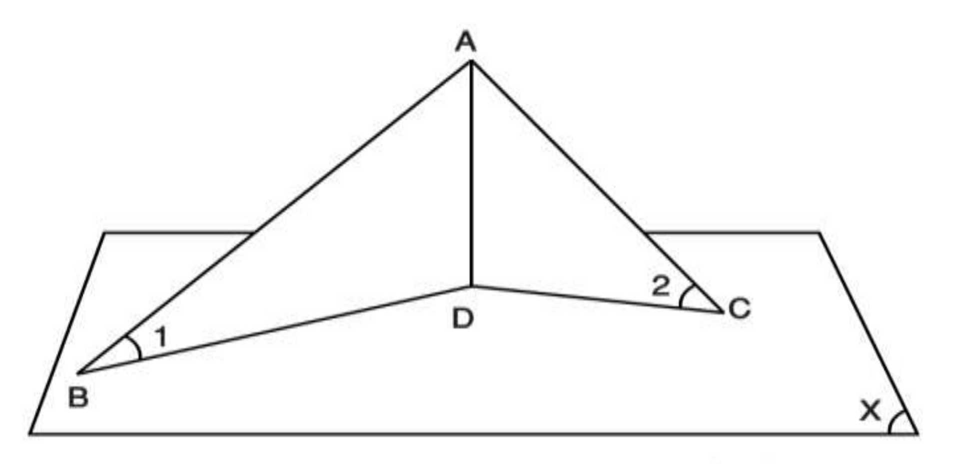
$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$

$\sin \measuredangle 1 < \sin \measuredangle 2$ $\measuredangle 1 , \measuredangle 2$ زوايا حادة

$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (و.هـ.م .)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

س5 :برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلا هو الاطول .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ مائلان على (X)

$\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

المطلوب : $AB > AC$

البرهان :

$\because$ $\measuredangle 1$ ، $\measuredangle 2$ هما زاويتي ميل $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AB}$ على (X) على الترتيب

$\therefore$ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{CD}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (X)

(زاوية ميل مستقيم على مستوي هي الزاوية المحدده بالمائل ومسقطه على المستوي)

نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$ $\therefore$

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوي هي قطعة المستقيم المحدده بين أثري لعمودين المرسومين من طرفي تلك القطعة على المستوي)

$\therefore \overline{AD} \perp \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{CD}$

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومه من ثره في ذلك المستوي)

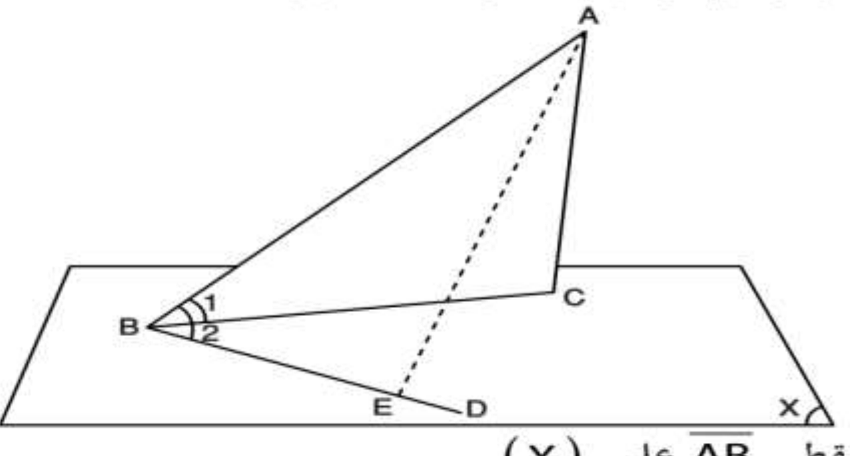
$\because m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$ (معطى)

$\therefore \sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$

$$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} < \frac{1}{AC} \Rightarrow AB > AC$$ (خواص التباين)

Mob/07705795052
ميسان العمارة .

س6 :برهن على أن الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاويه المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم أخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي .



المعطيات : ليكن $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\measuredangle ABC$ زاوية الميل ، $\overleftrightarrow{BD} \subset (X)$

المطلوب : $m\measuredangle ABC < m\measuredangle ABD$

البرهان : لتكن $E \in \overleftrightarrow{BD}$ بحيث $BC = BE$

نصل $\overline{AE}$

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (تعريف المسقط)

$AC < AE$

(العمود : هو أقصر مسافة بين نقطه ومستوي)

$BC = BE$ (بالعمل) ، $AB = AB$ (مشترك)

$\therefore m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$

(اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر وأختلف الضلعان الآخران فاصغرهما يقابل أصغر الزاويتين)

(و.هـ.م.)

الإعدام أخف عقاب

يتلقاه الفرد العربي.

أهنالك أقسى من هذا؟

- طبعاً..

فالأقسى من هذا

أن يحيا في الوطن العربي!

احمد مطر.

Mob/07705795052
ميسان العمارة .